

Problem kapeluszy *Marcin KRZYWKOWSKI**

Rozważmy następujący problem, zwany problemem kapeluszy (ang. *hat problem*). Do pokoju wchodzi n osób i każdej z nich losowo zostaje nałożony niebieski lub czerwony kapelusz. Każdy widzi kapelusze pozostałych osób, ale nie widzi swojego. Żadna komunikacja nie jest dozwolona, z wyjątkiem ustalenia strategii przed rozpoczęciem gry. Po spojrzeniu na kapelusze pozostałych każdy gracz zgaduje, jaki kolor ma jego kapelusz, lub rezygnuje z próby zgadnięcia. Odpowiedzi są udzielane w taki sposób, że pozostali gracze ich nie słyszą oraz nie dowiadują się, czy odpowiadający próbował zgadnąć, czy zrezygnował i czy odpowiedź była poprawna. Uczestnicy grają całą drużyną, która wygrywa, jeżeli co najmniej jedna osoba poprawnie odgadnie kolor swojego kapelusza i nikt inny nie poda błędnej odpowiedzi. W przeciwnym przypadku drużyna przegrywa.

Problem kapeluszy z siedmioma osobami został sformułowany przez Todda Eberta w jego rozprawie doktorskiej [1] i nazwany tam „problemem siedmiu więźniów”. Noga Alon [2] podał ograniczenie dolne na szansę sukcesu dla uogólnionego problemu kapeluszy z n osobami i q kolorami. Po konferencji w Nowym Orleanie, dzięki której problem kapeluszy zdobył zainteresowanie matematyków, a także mediów, w artykule w *The New York Times* [3] przedstawiono problem kapeluszy z trzema osobami i jego związek z teorią kodów Hamminga. Problem kapeluszy ma powiązania z wieloma zagadnieniami informatycznymi i matematycznymi, na przykład z programowaniem liniowym, programowaniem genetycznym, aproksymacją funkcji boolowskich oraz autoredukowalnością ciągów losowych, a także znajduje zastosowania w innych dziedzinach nauki, między innymi w biologii i ekonomii.

Problemem tym zainteresowałem się, czytając artykuł w *Delcie* (zob. [4]). W tym artykule problem kapeluszy został przedstawiony w kontekście kodów Hamminga i tzw. kodów wykrywających błędy, dzięki którym możemy, na przykład, korzystać z płyty CD pomimo zarysowań. W kolejnym artykule dotyczącym tego zagadnienia (zob. [5]) przedstawiono pewne modyfikacje problemu wraz z rozwiązaniami. Autor zachęcał również czytelników do zmięczenia się z problemem kapeluszy z trzema kolorami i n osobami. Najprostszy przypadek, czyli zadanie z trzema osobami i trzema kolorami, rozwiązujemy w niniejszym artykule. Jak dotąd, nie jest znane rozwiązanie problemu dla żadnej liczby $n > 3$ osób przy trzech kolorach kapeluszy.

Rozpatrujemy problem kapeluszy z trzema osobami (Alicja, Bartek i Marek) i trzema kolorami (czerwony, niebieski i zielony). Podamy strategię dla tego problemu i udowodnimy, że jest ona optymalna.

Strategia. Alicja, Bartek i Marek postępują następująco.

Alicja: jeśli Alicja widzi, że Bartek i Marek mają kapelusze różnych kolorów, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak Marek. Jeśli zaś Bartek i Marek mają kapelusze tego samego koloru, to rezygnuje z odpowiedzi.

Bartek: jeśli Bartek widzi, że Alicja i Marek mają kapelusze różnych kolorów, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak Marek. Jeśli zaś Alicja i Marek mają kapelusze tego samego koloru, to rezygnuje z odpowiedzi.

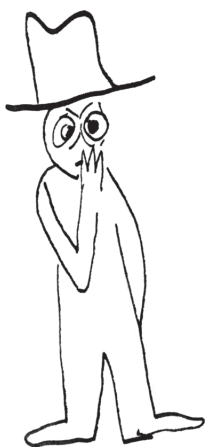
Marek: jeśli Marek widzi, że Alicja i Bartek mają kapelusze tego samego koloru, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak oni. Jeśli zaś Alicja i Bartek mają kapelusze różnych kolorów, to rezygnuje z odpowiedzi.

Udowodnimy, że powyższa strategia jest optymalna, czyli nie istnieje żadna lepsza strategia (deterministyczna).

W naszych rozważaniach przez *przypadek* rozumiemy konkretny układ kapeluszy na głowach graczy. W badanym przez nas problemie kapeluszy z trzema osobami i trzema kolorami jest $3^3 = 27$ możliwych przypadków. Przez *sytuację*, którą widzi dana osoba, rozumiemy układ kapeluszy na głowach wszystkich osób poza tą jedną. W rozwiązywanym przez nas problemie każdy widzi jedną z $3^2 = 9$ możliwych sytuacji.

Twierdzenie. *Powyższa strategia jest optymalna dla problemu kapeluszy z trzema osobami i trzema kolorami.*

Dowód. Naszą strategię łatwo przedstawić za pomocą tabeli. Poniżej podaliśmy kilka przykładowych wierszy tabeli dla naszej strategii. Zachęcamy do



Łatwo zauważyć, że gdyby próbować rozwiązać problem kapeluszy, analizując wszystkie możliwe strategie, to złożoność obliczeniowa tego zagadnienia spowoduje, iż już dla wcale nie tak dużych liczb n i q (liczba osób i liczba kolorów, odpowiednio), problem nie zostanie rozwiązany przez komputer w żadnym rozsądnym czasie.

*Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska

samodzielnego wypisania dalszych wierszy, co ułatwi analizę dowodu. W poniższej tabeli przez c , n i z oznaczamy odpowiednio kolor czerwony, niebieski i zielony. Znak „+” oznacza poprawną odpowiedź lub sukces, znak „-” oznacza błędną odpowiedź lub porażkę, a puste pole oznacza rezygnację z odpowiedzi. Po utworzeniu całej tabelki dowiadujemy się, że drużyna wygrywa w 15 spośród 27 przypadków.



Kolor kapelusza			Odpowiedź			Efekt
Alicji	Bartka	Marka	Alicji	Bartka	Marka	
c	c	c			+	+
c	c	n	-	-	-	-
c	n	c	+			+
z	c	n	-			-
c	n	z	-	-		-

Przypuśćmy teraz, że istnieje lepsza strategia, za pomocą której drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach, czyli przegrywa w mniej niż 12 przypadkach.

Weźmy dowolną sytuację widzianą przez osobę X , wybraną dowolnie z trójki graczy. Udzielona odpowiedź zależy tylko od sytuacji – jest taka sama we wszystkich przypadkach odpowiadających tej sytuacji. Wobec tego w dwóch z trzech przypadków odpowiadających ustalonej sytuacji odpowiedź osoby X jest błędna, a w jednym jest poprawna. Czyli każda osoba może udzielić odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej 5 sytuacjach, bo jeśli ktoś odpowiada w co najmniej 6 sytuacjach, to drużyna przegrywa w co najmniej 12 przypadkach, czyli strategia nie jest lepsza od naszej.

Skoro mamy trzy osoby, a każda z nich udziela odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej pięciu sytuacjach, a każda z tych odpowiedzi jest poprawna w dokładnie jednym przypadku, to drużyna wygrywa w co najwyżej 15 przypadkach. Jest to sprzeczne z założeniem, że stosując rozpatrywaną strategię, drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach. \square

Czytelników serdecznie zachęcamy do prób rozwiązania póki co nierozwiązanego problemu kapeluszy z czterema osobami i trzema kolorami.

Literatura

- [1] T. Ebert, *Applications of recursive operators to randomness and complexity*, rozprawa doktorska, University of California at Santa Barbara, 1998.
- [2] N. Alon, *Problems and Results in Extremal Combinatorics. II*, Discrete Mathematics 308 (2008), 4460–4472.
- [3] S. Robinson, *Why mathematicians now care about their hat color*, The New York Times, Science Times section, p. D5, April 10, 2001.
- [4] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki*, Delta 7/2005, 1–5.
- [5] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki – kontynuacja*, Delta 2/2006, 8–9.

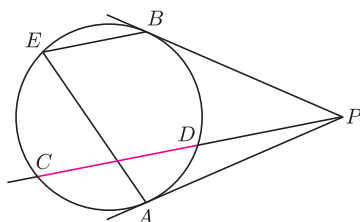


Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1267. Na tablicy zapisano liczby 1 i 2. Jeśli na tablicy znajdują się już liczby m i n , to można do nich dopisać liczbę $mn + m + n$. Wykazać, że na tablicy mogą wystąpić jedynie liczby postaci $2^a \cdot 3^b - 1$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Rozwiązanie na str. 2



M 1268. Dany jest okrąg o . Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono proste styczne do okręgu o w punktach A i B (rysunek). Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg o w punktach C i D . Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do prostej CD przecina okrąg o w punktach B i E . Udowodnić, że prosta AE przechodzi przez środek odcinka CD .

Rozwiązanie na str. 24

M 1269. Dowieść, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia n , dla której liczby $2n^2 + 1$, $3n^2 + 1$ oraz $6n^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie na str. 22

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 757. Ile razy zmieni się oświetlenie obrazu Słońca, otrzymanego za pomocą płasko-wypukłej soczewki, jeśli rozetniemy soczewkę wzdłuż średnicy i złożymy płaskimi stronami?

Rozwiązanie na str. 24

F 758. Ile razy mniejsze jest oświetlenie w nocy w czasie pełni od oświetlenia w południe? W obu przypadkach niebo jest bezchmurne, a wysokość Księżyca i Słońca nad horyzontem jest taka sama. Założyć, że współczynnik rozpraszania powierzchni Księżyca wynosi $\alpha = 0,1$.

Rozwiązanie na str. 2