Liczby Fibonacciego i domino

Do czego może służyć domino?

MARCIN KRZYWKOWSKI

Przypomnijmy sobie, że ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg (F_n) zdefiniowany następująco:

$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 1$.

Wyrazy tego ciągu nazywamy liczbami Fibonacciego. Zgodnie z powyższą definicją, łatwo otrzymujemy początkowe wyrazy ciągu (F_n):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

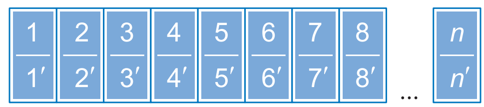
Liczby Fibonacciego posiadają wiele zastosowań i powiązań z życiem codziennym. Okazuje się, że mają one także związek z układaniem kostek domina.

W [2] możemy przeczytać, iż Lucas udowodnił w 1876 roku, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi zależność

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

Dowodzimy tej równości poprzez powiązanie liczb Fibonacciego z układaniem kostek domina.

Rozpatrzmy kostki domina o wymiarach 2×1 i pole o wymiarach $2 \times n$, gdzie $n \geq 1$ jest liczbą naturalną. Kratki naszego pola są oznaczone następująco: górne od lewej do prawej liczbami $1, 2, \ldots, n$, a dolne od lewej do prawej symbolami $1', 2', \ldots, n'$.

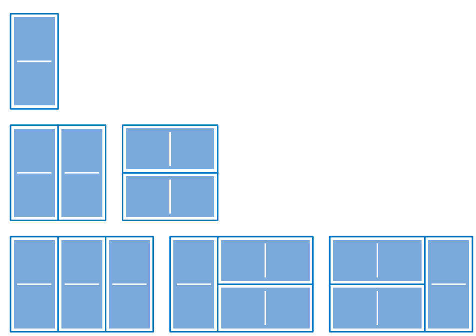


Rys. 1

Przez pozycję kostki domina rozumiemy zbiór dwóch kratek, na których ta kostka leży. Przez kolumnę o indeksie i rozumiemy zbiór dwóch kratek o indeksach i oraz i'. Pokrycie pola to zbiór pozycji kostek domina, które pokrywają to pole. Dwa pokrycia są różne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie zbiory pozycji są różne. Niech a_n będzie liczbą różnych pokryć pola o wymiarach $2 \times n$.

Ilustracje z rysunku 2 pokazują, że

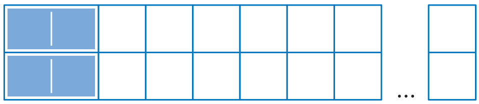
$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ i } a_3 = 3.$$



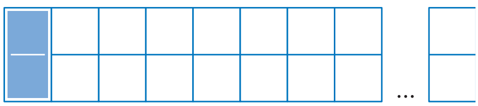
Rys. 2

Lemat. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ mamy $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Dowód. Jeśli chcemy pokryć pole o wymiarach $2 \times (n+2)$, to kolumnę o indeksie **1** możemy przykryć, kładąc dwie kostki domina poziomo (rysunek 3) albo jedną pionowo (rysunek 4).



Rys. 3



Rys. 4

Jeśli kostki domina leżą poziomo, to pozostało nam do pokrycia pole o wymiarach $2 \times n$. Jest a_n możliwości dokonania tego. Jeśli kostka leży pionowo, to musimy pokryć pozostałe pole o wymiarach $2 \times (n+1)$ i możemy to zrobić na a_{n+1} sposobów. Dodając te liczby, otrzymujemy równość

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Twierdzenie. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ mamy $a_n = F_{n+1}$.

Dowód. Ponieważ

$$a_1 = 1 = F_2 \ \text{ i } \ a_2 = 2 = F_3$$

oraz ta sama rekurencyjna zasada obowiązuje dla obu tych ciągów, więc $a_n = F_{n+1}$.

Twierdzenie (Lucas, 1876). Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ mamy

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

Dowód. Dla $n = 1$ mamy

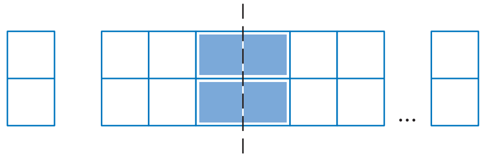
$$F_3 = 2 = 1 + 1 = F_1^2 + F_2^2.$$

Dla $n \geq 2$, wobec poprzedniego twierdzenia, powyższa równość jest równoważna równości

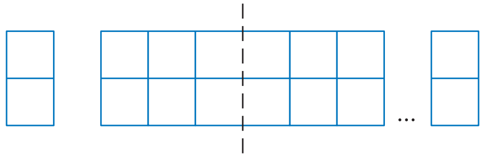
$$a_{2n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2 \ \text{(dla } n \geq 1\text{)},$$

którą udowodnimy, układając kostki domina.

Rozpatrzmy pole o wymiarach $2\times(2n+2)$, podzielone na dwa sąsiadujące pola o wymiarach $2 \times (n+1)$ każde. Jeśli pokrywamy pole o wymiarach $2 \times (2n+2)$, to jego połowy mają wspólne kostki domina (rysunek 5), albo nie mają wspólnych kostek domina (rysunek 6).



Rys. 5



Rys. 6

W pierwszym przypadku musimy pokryć niezależnie dwa pola o wymiarach $2 \times n$ każde. Jest a_n^2 możliwości dokonania tego. Dodając te równości, otrzymujemy $a_{2n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2$. W drugim przypadku pozostaje nam pokryć niezależnie dwa pola o wymiarach $2 \times (n+1)$ każde, zatem jest $a_{n+1} \cdot a_{n+1} = a_{n+1}^2$ możliwości aby tego dokonać. ❑

MARCIN KRZYWKOWSKI

pracownik Politechniki Gdańskiej

LITERATURA

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1996, s. 356–367.

[2] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley-Interscience, New York 2001.