POLITECHNIKA GDAŃSKA

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

Marcin Krzywkowski

RÓŻNE DOWODY WŁASNOŚCI LICZB FIBONACCIEGO I LUCASA

Praca magisterska wykonana

w Zakładzie Matematyki Dyskretnej

pod kierunkiem

dr hab. J. Toppa, prof. nadzw. PG

Gdańsk 2009

Marcin Krzywkowski

RÓŻNE DOWODY WŁASNOŚCI LICZB FIBONACCIEGO I LUCASA

....

PODPIS KIEROWNIKA KATEDRY *PODPIS PROMOTORA* *PODPIS AUTORA*

PODZIĘKOWANIA

Jestem bardzo wdzięczny Panu Profesorowi Jerzemu Toppowi za opiekę naukową w trakcie czterech lat mojego studiowania na Politechnice Gdańskiej. Jako promotor niniejszej pracy magisterskiej, Pan Profesor służył licznymi uwagami i wskazówkami, dzięki którym przybrała ona obecną formę. Dziękuję za wielogodzinne dyskusje i seminaria, podczas których utwierdzałem się w chęci podjęcia dalszych kroków w kierunku matematyki.

Dziękuję mojej Mamie, bez której to wszystko nie byłoby możliwe.

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie

Leonardo Fibonacci zdefiniował ciąg, w którym pierwszy i drugi wyraz są równe 1, a każdy kolejny jest sumą dwóch bezpośrednio go poprzedzających.

Edouard Lucas zdefiniował ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 1, drugi jest równy 3, a każdy kolejny jest sumą dwóch bezpośrednio go poprzedzających.

Od tego czasu zaobserwowano wiele własności tych ciągów.

Jak się okazuje, sposobów ich dowodzenia jest także wiele.

Rozdział 2 zawiera biografie Fibonacciego oraz Lucasa na podstawie [14] i [15].

W rozdziale 3 podajemy definicje związane z liczbami Fibonacciego i Lucasa.

W rozdziale 4 udowadniamy podstawowe własności liczb Fibonacciego i Lucasa.

W rozdziałach 5, 6, 7 i 8 przedstawiamy dowody własności liczb Fibonacciego odpowiednio: indukcyjne, algebraiczne, kombinatoryczne i niestandardowe.

W rozdziale 9 przedstawiamy dodatkową własność liczb Fibonacciego z dowodem indukcyjnym.

W rozdziale 10 przedstawiamy dodatkowe własności liczb Fibonacciego i Lucasa z dowodami algebraicznymi.

W tej pracy przyjmujemy, że najmniejszą liczbą naturalną jest 1.

Własności liczb Fibonacciego i Lucasa udowadniane w tej pracy pochodzą z [7] i [3]. O ich wyborze decydowała przydatność do ukazania charakterystycznych cech poszczególnych sposobów dowodzenia.

Celem dowodzenia tych samych własności na wiele sposobów jest zaprezentowanie stopnia skomplikowania poszczególnych sposobów dowodzenia. Oczywiście zależy to od dowodzonej własności, dla jakiejś własności dany sposób dowodzenia może okazać się bardzo prosty i efektowny, ale gdy dowodzimy tym sposobem innej własności, dowód okazuje się być bardzo długi i skomplikowany obliczeniowo. Znajomość różnych sposobów dowodzenia własności liczb Fibonacciego i Lucasa ma istotną zaletę polegającą na tym, że gdy chcemy udowodnić hipotetyczną własność, znajomość różnych sposobów dowodzenia zwiększa nasze szanse na osiągnięcie celu.

Algebraiczny sposób dowodzenia własności liczb Fibonacciego i Lucasa polega na zastosowaniu formuły Bineta, która jest wzorem na n-tą liczbę Fibonacciego lub Lucasa.

Kombinatoryczny sposób dowodzenia własności liczb Fibonacciego polega na wykorzystaniu powiązania liczb Fibonacciego z układaniem klocków domina na polu o szerokości 2 i długości będącej liczbą naturalną. Ten sposób dowodzenia okazuje się być bardzo ciekawy ze względu na udowadnianie teoretycznych równości poprzez przetłumaczenie ich na język świata rzeczywistego i dokonanie tam dowodu.

Przez dowód niestandardowy rozumiemy dowód nienależący do żadnej spośród wcześniejszych grup.

W większości rozdziałów dowód pierwszego twierdzenia szczegółowo objaśniamy, w pozostałych dowodach jedynie wymieniamy stosowane metody.

W języku angielskim dostępne jest współczesne wydanie dzieła Fibonacciego *Liber Abaci* [11].

Liczbom Fibonacciego i Lucasa zostało poświęconych wiele książek, między innymi: [1], [4], [5], [6], [8], [9], [10], [12] i [13].

Liczby Fibonacciego są nadal badane przez matematyków, o czym świadczy niedawny artykuł naukowy [2] o kombinatorycznych dowodach własności liczb Fibonacciego opublikowany w *The Electronic Journal of Combinatorics*.

Rozdział 2

Fibonacci i Lucas

2.1 Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci, zwany również Leonardo Pisano lub Leonard of Pisa, był najwybitniejszym europejskim matematykiem Średniowiecza. Mało wiadomo o jego życiu za wyjątkiem kilku faktów, które zapisał w swoich pracach matematycznych. Żaden jemu współczesny matematyk nie wspomniał o nim w żadnym dokumencie, który przetrwał.

Fibonacci urodził się około 1170 roku w rodzinie Bonacci w Pizie, dobrze prosperującym centrum handlowym. Fibonacci jest skrótem od „Filius Bonacci", czyli syn Bonacciego. Jego ojciec Guglielmo był odnoszącym sukcesy handlowcem, który chciał, aby jego syn przejął po nim interesy.

Około roku 1190, kiedy Guglielmo prowadził interesy w mieście Bugia (obecnie Bejaia) w Algierii, sprowadził tam swojego syna, aby uczył się sztuki rachowania. W Bugii Fibonacci ukończył podstawową edukację u muzułmańskiego nauczyciela, który wprowadził go do indo-arabskiego systemu liczbowego i indo-arabskich technik rachowania. On także zapoznał Fibonacciego z książką o algebrze, *Hisab al-jabr w'almuqabalah*, napisaną przez perskiego matematyka Al-Khawarizmi (około 825 roku). Współcześnie używane słowo „algebra" pochodzi właśnie z tytułu tej książki.

Jako dorosły, Fibonacci odbywał częste podróże w interesach do Egiptu, Syrii, Grecji, Francji i Konstantynopola, gdzie studiował różne systemy arytmetyczne, potem je stosował i wymieniał poglądy z innymi włoskimi uczonymi. Mieszkał także przez pewien czas na dworze cesarza rzymskiego Fryderyka II (1194-1250) i angażował się w naukowe dyskusje z cesarzem i jego filozofami.

Około roku 1200, w wieku około 30 lat, Fibonacci powrócił do Pizy. Był przekonany o elegancji i praktycznej wyższości indo-arabskiego systemu liczbowego nad rzymskim systemem liczbowym, który był używany we Włoszech. W 1202 roku opublikował swoją pionierską pracę *Liber Abaci*, która była poświęcona arytmetyce i elementarnej algebrze. Ta książka wprowadziła indo-arabski system liczbowy i algorytmy arytmetyczne do Europy. Fibonacci zademonstrował w tej książce potęgę indo-arabskiego systemu liczbowego bardziej energicznie niż w jakiejkolwiek wcześniejszej pracy matematycznej. 15 rozdziałów wyjaśnia ogromny wkład w rozwój algebry perskich matematyków Al-Khawarizmi i Ahy Kamil. Sześć lat później Fibonacci poprawił *Liber Abaci* i swoją książkę zadedykował Michaelowi Scottowi, najsłynniejszemu filozofowi i astrologowi na dworze Fryderyka II.

Po *Liber Abaci* Fibonacci napisał trzy inne wpływowe książki. *Practica Geometriae* napisana w 1220 roku jest podzielona na osiem rozdziałów i jest zadedykowana Mistrzowi Dominikowi, o którym niewiele wiadomo. Ta książka umiejętnie prezentuje geometrię i trygonometrię z euklidesowską ścisłością i pewną oryginalnością. Fibonacci korzystał z algebry do rozwiązywania problemów geometrycznych oraz z geometrii do rozwiązywania problemów algebraicznych, co było nowością w Europie w tamtym czasie. Jego kolejne dwie książki, *Flos* i *Liber Quadratorum*, zostały opublikowane w 1225 roku. Obie dotyczyły teorii liczb i stanowiły przykład talentu i oryginalności myślenia Fibonacciego, który przewyższał możliwościami większość uczonych tamtych czasów.

W 1225 roku Fryderyk II chciał sprawdzić talent Fibonacciego, dlatego zaprosił go na swój dwór na turniej matematyczny. Zawody składały się z trzech problemów. Pierwszy polegał na znalezieniu takiej liczby wymiernej x, że $x^2 - 5$ i $x^2 + 5$ są kwadratami liczb wymiernych. Fibonacci podał prawidłowe rozwiązanie $\frac{41}{12}$; $(\frac{41}{12})^2 - 5 = (\frac{31}{12})^2$, $(\frac{41}{12})^2+5 = (\frac{49}{12})^2$. Drugi problem polegał na znalezieniu rozwiązania równania sześciennego $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Fibonacci udowodnił geometrycznie, że to równanie nie posiada rozwiązań postaci $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, ale dał przybliżone rozwiązanie $1,3688081075$, które jest poprawne do dziewiątego miejsca po przecinku. Trzeci problem był następujący. Trzech dworzan miało swoje udziały w pewnej kwocie pieniędzy: udział pierwszego wynosił $\frac{1}{2}$, drugiego – $\frac{1}{3}$, a trzeciego – $\frac{1}{6}$ całości. Każdy ze współudziałowców pobrał ze wspólnej kasy pieniądze – niezbyt uczciwie: nie zostało nic. Następnie pierwszy z nich zwrócił połowę tego, co zabrał, drugi – jedną trzecią, a trzeci – jedną szóstą. Powstałą kwotę podzielono na trzy równe części i dano po jednej trzem dworzanom. Okazało się, że każdy z nich miał wówczas dokładnie tyle pieniędzy ile mu przysługiwało. Ile pieniędzy było w kasie na początku, ile pobrał każdy z nich? Fibonacci pokazał, że problem był niejednoznaczny i podał 47 jako najmniejszą odpowiedź. W zawodach, żadnemu z konkurentów Fibonacciego nie udało się rozwiązać żadnego spośród tych trzech problemów.

Cesarz docenił zasługi Fibonacciego dla Pizy, zarówno jako nauczyciela, jak i obywatela. Dzisiaj posąg Fibonacciego stoi w ogrodzie nad rzeką Arno, niedaleko Krzywej Wieży w Pizie.

Fibonacci zmarł około 1240 roku. Niedługo po jego śmierci włoscy kupcy docenili potęgę indo-arabskiego systemu liczbowego i stopniowo zaczęli stosować go w transakcjach biznesowych. Przed końcem szesnastego wieku większość Europy zaakceptowała ten system. *Liber Abaci* przez ponad dwa wieki pozostało europejskim standardem i odegrało znaczącą rolę w zastąpieniu rzymskiego systemu liczbowego systemem indo-arabskim.

2.2 Edouard Lucas

Francois Edouard Anatole Lucas (04.04.1842−03.10.1891) był francuskim matematykiem. Lucas jest znany z badania ciągu Fibonacciego. Powiązany z tym ciągiem ciąg Lucasa został tak nazwany właśnie na jego cześć. Lucas wykształcił się w Ecole Normale Superieure, następnie pracował w Paris Observatory, a potem został profesorem matematyki w Paryżu. W międzyczasie także służył w armii.

Lucas postawił zadanie, aby udowodnić, że jedynym rozwiązaniem równania diofantycznego $\sum_{n=1}^{N} n^2 = M^2$ z $N > 1$ jest $N = 24$ i $M = 70$. Ten fakt został udowodniony w 1918 roku, korzystając z funkcji hipereliptycznych.

Lucas wymyślał metody testowania pierwszości liczb. W 1857 roku, w wieku 15 lat, zaczął „ręcznie" testować pierwszość liczby $2^{127} - 1$, korzystając z ciągu Lucasa. W 1876 roku, po 19 latach, udowodnił, że $2^{127} - 1$ jest liczbą pierwszą. Ta liczba pozostała przez 75 lat największą znaną liczbą pierwszą Mersenne'a. Może ona pozostać na zawsze największą liczbą pierwszą, której pierwszość została udowodniona „ręcznie". Potem Derrick Henry Lehmer ulepszył test pierwszości Lucasa i uzyskał test pierwszości Lucasa−Lehmera dla liczb Mersenne'a.

Lucas interesował się także matematyką rekreacyjną. To właśnie on wymyślił łamigłówkę nazywaną „wieżami Hanoi", którą opublikował pod pseudonimem N. Claus de Siam, który jest anagramem „Lucas d'Amiens".

Lucas zmarł w nietypowych okolicznościach. Na bankiecie dorocznego kongresu *Association francaise pour l'avancement des sciences* kelner upuścił talerz i jego odłamek zaciął Lucasa w policzek. Zmarł kilka dni później na poważne zapalenie skóry prawdopodobnie spowodowane posocznicą. W momencie śmierci Lucas miał jedynie 49 lat.

Rozdział 3

Definicje

Definicja 1 *Ciąg* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zdefiniowany następująco:* $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ *dla* $n \geq 3$, *nazywamy ciągiem Fibonacciego, a jego wyrazy, liczbami Fibonacciego.*

Przykład 2 *Z powyższej definicji łatwo otrzymujemy początkowe wyrazy ciągu Fibonacciego:*

$$
\begin{array}{lclclcr}
F_1 & = & 1 & & & & \\
F_2 & = & 1 & & & & \\
F_3 & = & F_1 + F_2 & = & 1 + 1 & = & 2 \\
F_4 & = & F_2 + F_3 & = & 1 + 2 & = & 3 \\
F_5 & = & F_3 + F_4 & = & 2 + 3 & = & 5 \\
F_6 & = & F_4 + F_5 & = & 3 + 5 & = & 8 \\
F_7 & = & F_5 + F_6 & = & 5 + 8 & = & 13 \\
F_8 & = & F_6 + F_7 & = & 8 + 13 & = & 21 \\
F_9 & = & F_7 + F_8 & = & 13 + 21 & = & 34 \\
F_{10} & = & F_8 + F_9 & = & 21 + 34 & = & 55 \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Definicja 3 *Ciąg* $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zdefiniowany następująco:* $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$ *dla* $n \geq 3$, *nazywamy ciągiem Lucasa, a jego wyrazy, liczbami Lucasa.*

Przykład 4 *Wobec powyższej definicji mamy*

$$
\begin{array}{lclclcr}
L_1 & = & 1 & & & & \\
L_2 & = & 3 & & & & \\
L_3 & = & L_1 + L_2 & = & 1 + 3 & = & 4 \\
L_4 & = & L_2 + L_3 & = & 3 + 4 & = & 7 \\
L_5 & = & L_3 + L_4 & = & 4 + 7 & = & 11 \\
L_6 & = & L_4 + L_5 & = & 7 + 11 & = & 18 \\
L_7 & = & L_5 + L_6 & = & 11 + 18 & = & 29 \\
L_8 & = & L_6 + L_7 & = & 18 + 29 & = & 47 \\
L_9 & = & L_7 + L_8 & = & 29 + 47 & = & 76 \\
L_{10} & = & L_8 + L_9 & = & 47 + 76 & = & 123 \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

W tabeli 1 podajemy sto początkowych liczb Fibonacciego i Lucasa.

Tabela 1

n	F_n	L_n	n	F_n	L_n
1	1	1	41	165 580 141	370 248 451
2	1	3	42	267 914 296	599 074 578
3	2	4	43	433 494 437	969 323 029
4	3	7	44	701 408 733	1 568 397 607
5	5	11	45	1 134 903 170	2 537 720 636
6	8	18	46	1 836 311 903	4 106 118 243
7	13	29	47	2 971 215 073	6 643 838 879
8	21	47	48	4 807 526 976	10 749 957 122
9	34	76	49	7 778 742 049	17 393 796 001
10	55	123	50	12 586 269 025	28 143 753 123
11	89	199	51	20 365 011 074	45 537 549 124
12	144	322	52	32 951 280 099	73 681 302 247
13	233	521	53	53 316 291 173	119 218 851 371
14	377	843	54	86 267 571 272	192 900 153 618
15	610	1 364	55	139 583 862 445	312 119 004 989
16	987	2 207	56	225 851 433 717	505 019 158 607
17	1 597	3 571	57	365 435 296 162	817 138 163 596
18	2 584	5 778	58	591 286 729 879	1 322 157 322 203
19	4 181	9 349	59	956 722 026 041	2 139 295 485 799
20	6 765	15 127	60	1 548 008 755 920	3 461 452 808 002
21	10 946	24 476	61	2 504 730 781 961	5 600 748 293 801
22	17 711	39 603	62	4 052 739 537 881	9 062 201 101 803
23	28 657	64 079	63	6 557 470 319 842	14 662 949 395 604
24	46 368	103 682	64	10 610 209 857 723	23 725 150 497 407
25	75 025	167 761	65	17 167 680 177 565	38 388 099 893 011
26	121 393	271 443	66	27 777 890 035 288	62 113 250 390 418
27	196 418	439 204	67	44 945 570 212 853	100 501 350 283 429
28	317 811	710 647	68	72 723 460 248 141	162 614 600 673 847
29	514 229	1 149 851	69	117 669 030 460 994	263 115 950 957 276
30	832 040	1 860 498	70	190 392 490 709 135	425 730 551 631 123
31	1 346 269	3 010 349	71	308 061 521 170 129	688 846 502 588 399
32	2 178 309	4 870 847	72	498 454 011 879 264	1 114 577 054 219 522
33	3 524 578	7 881 196	73	806 515 533 049 393	1 803 423 556 807 921
34	5 702 887	12 752 043	74	1 304 969 544 928 657	2 918 000 611 027 443
35	9 227 465	20 633 239	75	2 111 485 077 978 050	4 721 424 167 835 364
36	14 930 352	33 385 282	76	3 416 454 622 906 707	7 639 424 778 862 807
37	24 157 817	54 018 521	77	5 527 939 700 884 757	12 360 848 946 698 171
38	39 088 169	87 403 803	78	8 944 394 323 791 464	20 000 273 725 560 978
39	63 245 986	141 422 324	79	14 472 334 024 676 221	32 361 122 672 259 149
40	102 334 155	228 826 127	80	23 416 728 348 467 685	52 361 396 397 820 127

n	F_n	L_n
81	37 889 062 373 143 906	84 722 519 070 079 276
82	61 305 790 721 611 591	137 083 915 467 899 403
83	99 194 853 094 755 497	221 806 434 537 978 679
84	160 500 643 816 367 088	358 890 350 005 878 082
85	259 695 496 911 122 585	580 696 784 543 856 761
86	420 196 140 727 489 673	939 587 134 549 734 843
87	679 891 637 638 612 258	1 520 283 919 093 591 604
88	1 100 087 778 366 101 931	2 459 871 053 643 326 447
89	1 779 979 416 004 714 189	3 980 154 972 736 918 051
90	2 880 067 194 370 816 120	6 440 026 026 380 244 498
91	4 660 046 610 375 530 309	10 420 180 999 117 162 549
92	7 540 113 804 746 346 429	16 860 207 025 497 407 047
93	12 200 160 415 121 876 738	27 280 388 024 614 569 596
94	19 740 274 219 868 223 167	44 140 595 050 111 976 643
95	31 940 434 634 990 099 905	71 420 983 074 726 546 239
96	51 680 708 854 858 323 072	115 561 578 124 838 522 882
97	83 621 143 489 848 422 977	186 982 561 199 565 069 121
98	135 301 852 344 706 746 049	302 544 139 324 403 592 003
99	218 922 995 834 555 169 026	489 526 700 523 968 661 124
100	354 224 848 179 261 915 075	792 070 839 848 372 253 127

Teraz zdefiniujemy liczby Fibonacciego i Lucasa o wskaźnikach całkowitych.

Definicja 5 *Liczby Fibonacciego o wskaźnikach całkowitych definiujemy za pomocą równania* $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$*, gdzie* n *jest liczbą całkowitą. Dla wskaźników naturalnych ta definicja pokrywa się z definicją ciągu Fibonacciego.*

Przykład 6 *Z powyższej definicji łatwo otrzymujemy:*

$$\begin{array}{llllrcrcr}
F_0 & = & F_2 - F_1 & = & 1 & - & 1 & = & 0 \\
F_{-1} & = & F_1 - F_0 & = & 1 & - & 0 & = & 1 \\
F_{-2} & = & F_0 - F_{-1} & = & 0 & - & 1 & = & -1 \\
F_{-3} & = & F_{-1} - F_{-2} & = & 1 & - & (-1) & = & 2 \\
F_{-4} & = & F_{-2} - F_{-3} & = & -1 & - & 2 & = & -3 \\
F_{-5} & = & F_{-3} - F_{-4} & = & 2 & - & (-3) & = & 5 \\
F_{-6} & = & F_{-4} - F_{-5} & = & -3 & - & 5 & = & -8 \\
F_{-7} & = & F_{-5} - F_{-6} & = & 5 & - & (-8) & = & 13 \\
F_{-8} & = & F_{-6} - F_{-7} & = & -8 & - & 13 & = & -21 \\
F_{-9} & = & F_{-7} - F_{-8} & = & 13 & - & (-21) & = & 34 \\
F_{-10} & = & F_{-8} - F_{-9} & = & -21 & - & 34 & = & -55 \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Definicja 7 *Liczby Lucasa o wskaźnikach całkowitych definiujemy za pomocą równania* $L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$*, gdzie* n *jest liczbą całkowitą. Dla wskaźników naturalnych ta definicja pokrywa się z definicją ciągu Lucasa.*

Przykład 8 *Wobec powyższej definicji mamy*

$$\begin{array}{lllrrrrrl}
L_0 & = & L_2 - L_1 & = & 3 & - & 1 & = & 2 \\
L_{-1} & = & L_1 - L_0 & = & 1 & - & 2 & = & -1 \\
L_{-2} & = & L_0 - L_{-1} & = & 2 & - & (-1) & = & 3 \\
L_{-3} & = & L_{-1} - L_{-2} & = & -1 & - & 3 & = & -4 \\
L_{-4} & = & L_{-2} - L_{-3} & = & 3 & - & (-4) & = & 7 \\
L_{-5} & = & L_{-3} - L_{-4} & = & -4 & - & 7 & = & -11 \\
L_{-6} & = & L_{-4} - L_{-5} & = & 7 & - & (-11) & = & 18 \\
L_{-7} & = & L_{-5} - L_{-6} & = & -11 & - & 18 & = & -29 \\
L_{-8} & = & L_{-6} - L_{-7} & = & 18 & - & (-29) & = & 47 \\
L_{-9} & = & L_{-7} - L_{-8} & = & -29 & - & 47 & = & -76 \\
L_{-10} & = & L_{-8} - L_{-9} & = & 47 & - & (-76) & = & 123 \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Rozdział 4

Podstawowe własności liczb Fibonacciego i Lucasa

W tym rozdziale dowodzimy podstawowych własności liczb Fibonacciego i Lucasa. Z większości spośród nich skorzystamy przy dowodzeniu innych własności liczb Fibonacciego i Lucasa w kolejnych rozdziałach.

Następujące dwie stałe okazują się być bardzo użyteczne w dowodzeniu własności liczb Fibonacciego i Lucasa.

Definicja 9 *Stałe liczbowe* α *i* β *definiujemy następująco:* $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Teraz dowiedziemy pewnych elementarnych faktów odnośnie powyższych dwóch stałych.

Fakt 10 $\alpha + \beta = 1$

Dowód. $\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ■

Fakt 11 $\alpha - \beta = \sqrt{5}$

Dowód. $\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ ■

Fakt 12 $\alpha\beta = -1$

Dowód. $\alpha\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$ ■

Fakt 13 $\alpha^2 = \alpha + 1$

Dowód. $\alpha^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \alpha + 1$ ■

Fakt 14 $\beta^2 = \beta + 1$

Dowód. $\beta^2 = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \beta + 1$ ■

Twierdzenie 15 *Jeżeli $x^2 = x + 1$, to dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$x^n = F_n x + F_{n-1}.$$

Dowód. Powyższego twierdzenia dowodzimy indukcyjnie.

Dla $n = 2$ mamy $x^n = x^2 = x + 1 = 1x + 1 = F_2 x + F_1$.

Załóżmy, że $n \geq 2$ i $x^n = F_n x + F_{n-1}$. Pokażemy, że $x^{n+1} = F_{n+1}x + F_n$.

Łatwo uzyskujemy $x^{n+1} = xx^n = x(F_n x + F_{n-1}) = F_n x^2 + F_{n-1}x = F_n(x+1) + F_{n-1}x = (F_{n-1} + F_n)x + F_n = F_{n+1}x + F_n$. ■

Poniższe dwa wnioski wynikają bezpośrednio z twierdzenia 15 oraz z faktów 13 i 14 odpowiednio.

Wniosek 16 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$\alpha^n = F_n \alpha + F_{n-1}.$$

Wniosek 17 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$\beta^n = F_n \beta + F_{n-1}.$$

Teraz zdefiniujemy pewne pojęcia z teorii liczb, które będą nam potrzebne do formułowania i dowodzenia pewnych własności liczb Fibonacciego.

Definicja 18 *Mówimy, że liczba naturalna a dzieli liczbę naturalną b (piszemy $a|b$), jeśli istnieje liczba naturalna c taka, że $b = c \cdot a$.*

Definicja 19 *Największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych a i b (oznaczanym przez (a, b)) nazywamy taką liczę naturalną c, że $c|a$ i $c|b$ oraz dla każdej liczby naturalnej d takiej, że $d|a$ i $d|b$, mamy $d|c$ (równoważnie $d \leq c$).*

Definicja 20 *Niech a i b będą liczbami naturalnymi. Jeżeli $(a, b) = 1$, to mówimy, że liczby a i b są względnie pierwsze.*

Fakt 21 *Dla dowolnych liczb naturalnych a i b takich, że $a < b$ mamy $(a, b) = (b-a, a)$.*

Dowód. Ponieważ $(a, b)|a$ i $(a, b)|b$, to $(a, b)|(b-a)$. Zatem $(a, b)|(b-a)$ i $(a, b)|a$. Skoro dla każdej liczby naturalnej x takiej, że $x|(b-a)$ i $x|a$ mamy $x|(b-a, a)$, to $(a, b)|(b-a, a)$.

Ponieważ $(b-a, a)|(b-a)$ i $(b-a, a)|a$, to $(b-a)|b$. Zatem $(b-a, a)|a$ i $(b-a)|b$. Skoro dla każdej liczby naturalnej y takiej, że $y|a$ i $y|b$ mamy $y|(a, b)$, to $(b-a, a)|(a, b)$.

Ponieważ $(a, b)|(b-a, a)$ i $(b-a, a)|(a, b)$, to $(a, b) = (b-a, a)$. ■

Poniższe twierdzenie mówi o tym, że dowolne dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

Twierdzenie 22 *Dla każdej liczby naturalnej n mamy $(F_n, F_{n+1}) = 1$.*

Dowód. Oczywiste jest, że $(F_n, F_{n+1})|F_n$ i $(F_n, F_{n+1})|F_{n+1}$. Z tego wynika, że $(F_n, F_{n+1})|F_n^2$ i $(F_n, F_{n+1})|F_{n-1}F_{n+1}$, więc także $(F_n, F_{n+1})|(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) = (-1)^n = \pm 1$. Ponieważ $(F_n, F_{n+1})| \pm 1$ i (F_n, F_{n+1}) jest liczbą naturalną, to $(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Teraz dowiedziemy tego twierdzenia innym sposobem.

Z faktu 21 wynika, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b takich, że $a < b$ mamy $(a, b) = (b - a, a)$. Mamy $(F_n, F_{n+1}) = (F_{n+1} - F_n, F_n) = (F_{n-1}, F_n) = ... = (F_3, F_4) = (F_2, F_3) = (1, 2) = 1$. ∎

Następujące dwa twierdzenia to jawne wzory na dowolny wyraz ciągu Fibonacciego (Lucasa, odpowiednio).

Twierdzenie 23 (formuła Bineta dla ciągu Fibonacciego) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Dowód. Powyższe twierdzenie udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n = 1$ mamy $\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1 = F_1$. Dla $n = 2$ uzyskujemy $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1 = F_2$.

Załóżmy, że $n \geq 2$ i $F_{n-1} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$ oraz $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. Pokażemy, że $F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

Korzystając z definicji ciągu Fibonacciego, z założenia indukcyjnego, oraz z faktów 13 i 14, otrzymujemy $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(1 + \alpha) - \beta^{n-1}(1 + \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}\alpha^2 - \beta^{n-1}\beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = F_{n+1}$. ∎

Twierdzenie 24 (formuła Bineta dla ciągu Lucasa) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Dowód. Powyższe twierdzenie udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n = 1$ mamy $L_n = \alpha^n + \beta^n = \alpha + \beta = 1 = L_1$. Dla $n = 2$ otrzymujemy $L_n = \alpha^n + \beta^n = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha + 1 + \beta + 1 = 3 = L_2$.

Załóżmy teraz, że $n \geq 2$ i $L_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ oraz $L_n = \alpha^n + \beta^n$. Pokażemy, że $L_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$.

Korzystając z definicji ciągu Lucasa oraz z założenia indukcyjnego, dostajemy $L_{n+1} = L_{n-1} + L_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^n + \beta^n = (1 + \alpha)\alpha^{n-1} + (1 + \beta)\beta^{n-1} = \alpha^2\alpha^{n-1} + \beta^2\beta^{n-1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$. ∎

Poniższe dwa twierdzenia to jawne wzory na liczbę Fibonacciego (Lucasa, odpowiednio) o dowolnym wskaźniku całkowitym.

Twierdzenie 25 (uogólniona formuła Bineta dla liczb Fibonacciego) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Dowód. Wobec twierdzenia 23 wystarczy wykazać, że dla każdej całkowitej nieujemnej liczby n mamy $F_{-n} = \frac{\alpha^{-n}-\beta^{-n}}{\alpha-\beta}$. Dowiedziemy tego indukcyjnie.

Dla $n = 0$ mamy $F_{-n} = F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0$,

$$\frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1 - 1}{\alpha - \beta} = 0.$$

Dla $n = 1$ łatwo otrzymujemy $F_{-n} = F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1$ oraz

$$\frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta(\alpha - \beta) = \frac{\beta-\alpha}{-(\alpha-\beta)}} = 1.$$

Załóżmy, że $n \geq 1$ i $F_{-n+2} = \frac{\alpha^{-n+2} - \beta^{-n+2}}{\alpha-\beta}$ oraz $F_{-n+1} = \frac{\alpha^{-n+1}-\beta^{-n+1}}{\alpha-\beta}$. Pokażemy, że $F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha-\beta}$.

Korzystając z definicji liczb Fibonacciego o wskaźnikach całkowitych oraz z założenia indukcyjnego dostajemy

$$F_{-n} = F_{-n+2} - F_{-n+1} = \frac{\alpha^{-n+2} - \beta^{-n+2}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{-n+1} - \beta^{-n+1}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(\alpha^2 - \alpha)\alpha^{-n} - (\beta^2 - \beta)\beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha + 1 - \alpha)\alpha^{-n} - (\beta + 1 - \beta)\beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{-}n - \beta^{-n}}{\alpha - \beta}.$$

■

Twierdzenie 26 (uogólniona formuła Bineta dla liczb Lucasa) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Dowód. Wobec twierdzenia 24 wystarczy wykazać, że dla każdej całkowitej nieujemnej liczby n mamy $L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n}$. Dowiedziemy tego indukcyjnie.

Dla $n = 0$ mamy $L_{-n} = L_0 = L_2 - L_1 = 3 - 1 = 2$, $\alpha^{-n} + \beta^{-n} = \alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 = 2 = L_0$. Dla $n = 1$ otrzymujemy $L_{-n} = L_{-1} = L_1 - L_0 = 1 - 2 = -1$ oraz $\alpha^{-n} + \beta^{-n} = \alpha^{-1} + \beta^{-1} = \frac{\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta}{(\alpha\beta)^2} = \alpha(\beta + 1) + (\alpha + 1)\beta = \alpha\beta + \alpha + \alpha\beta + \beta = -1$.

Załóżmy, że $n \geq 1$ i $L_{-n+2} = \alpha^{-n+2} + \beta^{-n+2}$ oraz $L_{-n+1} = \alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1}$. Pokażemy, że $L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n}$.

Korzystając z definicji liczb Lucasa o wska znikach całkowitych oraz z założenia indukcyjnego otrzymujemy $L_{-n} = L_{-n+2} - L_{-n+1} = \alpha^{-n+2} + \beta^{-n+2} - \alpha^{-n+1} - \beta^{-n+1} = (\alpha^2 - \alpha)\alpha^{-n} + (\beta^2 - \beta)\beta^{-n} = (\alpha + 1 - \alpha)\alpha^{-n} + (\beta + 1 - \beta)\beta^{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n}$. ■

Następujące trzy fakty będą nam potrzebne do tego, by udowonić kolejne wzory na n-tą liczbę Fibonacciego (Lucasa, odpowiednio).

Fakt 27 *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\frac{-\beta^n}{\alpha - \beta} \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Dowód. Powyższy fakt udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n = 1$ mamy $\frac{-\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{-\beta}{\alpha - \beta} = \frac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Nierówność $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} > -\frac{1}{2}$ jest równoważna nierówności $2\sqrt{5} > 1$, której prawdziwość jest oczywista. Nierówność $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ także jest oczywista. Dla $n = 2$ otrzymujemy $\frac{-\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{-\beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{-\beta - 1}{\alpha - \beta}$ $= \frac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}$. Nierówność $\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}} > -\frac{1}{2}$ jest równoważna prawdziwej nierówności $2\sqrt{5} > 3$. Nierówność $\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ jest oczywista.

Załóżmy, że $n \geq 1$ i $\frac{-\beta^n}{\alpha - \beta} \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Wystarczy teraz pokazać, że $\frac{-\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Oczywista jest równość $\frac{-\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \beta^2 \frac{-\beta^n}{\alpha - \beta}$. Liczba β^2 jest dodatnia. Ponieważ $\frac{-\beta^n}{\alpha - \beta} \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, to $\frac{-\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \in (-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2)$. Łatwo dostajemy $\beta^2 = \beta + 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1$ $= \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, bo $3 - \sqrt{5} < 2$. Zatem $(-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2) \subseteq (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ i $\frac{-\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \in (-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2)$ $\subseteq (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. ■

Fakt 28 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$\beta^n \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Dowód. Powyższy fakt udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n = 2$ mamy $\beta^n = \beta^2 = \beta + 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Nierówność $\frac{3-\sqrt{5}}{2} > -\frac{1}{2}$ jest równoważna prawdziwej nierówności $\sqrt{5} < 4$. Nierówność $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$ jest równoważna prawdziwej nierównośći $\sqrt{5} > 2$. Dla $n = 3$ łatwo otrzymujemy $\beta^n = \beta^3 = F_3\beta + F_2 = 2\beta + 1 = 2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = 2 - \sqrt{5}$. Nierówność $2 - \sqrt{5} > -\frac{1}{2}$ jest równoważna prawdziwej nierówności $5 > 2\sqrt{5}$. Nierówność $2 - \sqrt{5} < \frac{1}{2}$ jest równoważna prawdziwej nierówności $3 < 2\sqrt{5}$.

Załóżmy, że $n \geq 2$ i $\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Wystarczy pokazać, że $\beta^{n+2} \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Oczywiste jest, że $\beta^{n+2} = \beta^2 \cdot \beta^n$. Liczba β^2 jest dodatnia. Ponieważ $\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, to $\beta^{n+2} \in (-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2)$. Z dowodu faktu 27 wiemy, że $(-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2) \subseteq (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Ponieważ $\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, to $\beta^{n+2} \in (-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2) \subseteq (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. ■

Fakt 29 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$ mamy*

$$\sqrt{5}\beta^n \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Dowód. Powyższy fakt udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n = 4$ mamy $\sqrt{5}\beta^n = \sqrt{5}\beta^4 = \sqrt{5}(F_4\beta + F_3) = \sqrt{5}(3\beta + 2) = \sqrt{5}(\frac{3-3\sqrt{5}+4}{2})$ $= \frac{7\sqrt{5}-15}{2}$. Nierówność $\frac{7\sqrt{5}-15}{2} > -\frac{1}{2}$ jest równoważna prawdziwej nierówności $\sqrt{5} > 2$. Nierówność $\frac{7\sqrt{5}-15}{2} < \frac{1}{2}$ jest równoważna nierówności $7\sqrt{5} < 16$, która jest prawdziwa, jako że $245 < 256$. Dla $n = 5$ mamy $\sqrt{5}\beta^n = \sqrt{5}\beta^5 = \sqrt{5}(F_5\beta + F_4) = \sqrt{5}(5\beta + 3)$ $= \sqrt{5}(\frac{5-5\sqrt{5}+6}{2}) = \frac{11\sqrt{5}-25}{2}$. Nierówność $\frac{11\sqrt{5}-25}{2} > -\frac{1}{2}$ jest równoważna nierówności $11\sqrt{5} > 24$, która jest prawdziwa, jako że $605 > 576$. Nierówność $\frac{11\sqrt{5}-25}{2} < \frac{1}{2}$ jest równoważna nierówności $11\sqrt{5} < 26$, która jest prawdziwa, jako że $605 < 676$.

Załóżmy, że $n \geq 4$ i $\sqrt{5}\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Należy teraz pokazać, że $\sqrt{5}\beta^{n+2} \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Oczywiście $\sqrt{5}\beta^{n+2} = \beta^2 \cdot \sqrt{5}\beta^n$. Liczba β^2 jest dodatnia. Ponieważ $\sqrt{5}\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, to $\sqrt{5}\beta^n \in (-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2)$. Z dowodu faktu 28 mamy $(-\frac{1}{2}\beta^2; \frac{1}{2}\beta^2) \subseteq (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Ponieważ $\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, to $\beta^{n+2} \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. ∎

Następujące cztery twierdzenia to kolejne wzory na n-tą liczbę Fibonacciego (Lucasa, odpowiednio).

Twierdzenie 30 *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Dowód. Niech n będzie liczbą naturalną. Z formuły Bineta mamy $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. Z faktu 27 mamy $\frac{-\beta^n}{\alpha-\beta} \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Teraz otrzymujemy $\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} < \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta} + \frac{1}{2} < \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} + 1$, a stąd $F_n \leq \lfloor \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta} + \frac{1}{2} \rfloor < F_n + 1$. Ponieważ $\lfloor \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta} + \frac{1}{2} \rfloor$ jest liczbą naturalną, a F_n i $F_n + 1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $F_n = \lfloor \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \rfloor$. ∎

Twierdzenie 31 (Hoggatt) *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$L_n = \left\lfloor \alpha^n + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Dowód. Niech n będzie liczbą naturalną taką, że $n \geq 2$. Z formuły Bineta mamy $L_n = \alpha^n + \beta^n$. Z faktu 28 mamy $\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Teraz otrzymujemy $\alpha^n + \beta^n < \alpha^n + \frac{1}{2} < \alpha^n + \beta^n + 1$, a stąd $L_n \leq \lfloor \alpha^n + \frac{1}{2} \rfloor < L_n + 1$. Ponieważ $\lfloor \alpha^n + \frac{1}{2} \rfloor$ jest liczbą naturalną, a L_n i $L_n + 1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $L_n = \lfloor \alpha^n + \frac{1}{2} \rfloor$. ∎

Twierdzenie 32 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$F_{n+1} = \left\lfloor \alpha F_n + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Dowód. Niech n będzie liczbą naturalną. Z formuły Bineta mamy $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ oraz $F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$. Mamy $F_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha^n - \beta^n) - \beta^{n+1} + \alpha\beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha F_n + \frac{\beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha F_n + \beta^n$. Otrzymujemy $\alpha F_n + \beta^n < \alpha F_n + \frac{1}{2} < \alpha^n F_n + \beta^n + 1$, a stąd $F_{n+1} \leq \lfloor \alpha F_n + \frac{1}{2} \rfloor < F_{n+1} + 1$. Ponieważ $\lfloor \alpha F_n + \frac{1}{2} \rfloor$ jest liczbą naturalną, a F_{n+1} i $F_{n+1} + 1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $F_{n+1} = \lfloor \alpha F_n + \frac{1}{2} \rfloor$. ∎

Twierdzenie 33 (Hoggatt) *Dla każdej liczby naturalnej mamy*

$$L_{n+1} = \left\lfloor \alpha L_n + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Dowód. Niech n będzie liczbą naturalną. Z formuły Bineta mamy $L_n = \alpha^n + \beta^n$ oraz $L_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$. Mamy także $L_{n+1} = \alpha(\alpha^n + \beta) - \alpha\beta^n + \beta^{n+1} = \alpha L_n + (\beta - \alpha)\beta^n = \alpha F_n - \sqrt{5}\beta^n$. Z faktu 29 wynika, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$ mamy $-\sqrt{5}\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, a to jest równoważne temu, że $\sqrt{5}\beta^n \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Otrzymujemy $\alpha L_n + (\beta - \alpha)\beta^n < \alpha L_n + \frac{1}{2} < \alpha L_n + (\beta - \alpha)\beta^n + 1$, a stąd $L_{n+1} \leq \lfloor \alpha L_n + \frac{1}{2} \rfloor < L_{n+1} + 1$. Skoro $\lfloor \alpha L_n + \frac{1}{2} \rfloor$ jest liczbą naturalną oraz L_{n+1} i $L_{n+1} + 1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $L_{n+1} = \lfloor \alpha L_n + \frac{1}{2} \rfloor$. ∎

Poniższy fakt będzie nam potrzebny do obliczenia granicy stosunku dwóch kolejnych liczb Fibonacciego (Lucasa, odpowiednio) przy wskaźnikach dążących do nieskończoności.

Fakt 34

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

Dowód. Wystarczy udowodnić, że $\frac{\beta}{\alpha} \in (-1; 1)$. Mamy $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = -\beta^2 = -\beta - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$. Nierówności $\frac{\sqrt{5}-3}{2} > -1$ i $\frac{\sqrt{5}-3}{2} < 1$ są równoważna nierównościom $\sqrt{5} - 3 > -2$ i $\sqrt{5} - 3 < 2$, odpowiednio. Obie te nierówności są równoważne nierówności $\sqrt{5} > 1$, której prawdziwość jest oczywista. ∎

Następujące dwa twierdzenia mowią o granicy stosunku dwóch kolejnych liczb Fibonacciego (Lucasa, odpowiednio) przy wskaźnikach dążących do nieskończoności.

Twierdzenie 35

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

Dowód. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta(\frac{\beta}{\alpha})^n}{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n}.$$

Z faktu 34 wiemy, że $\lim_{n\to\infty}(\frac{\beta}{\alpha})^n = 0$, a zatem $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta(\frac{\beta}{\alpha})^n}{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n} = \alpha$. ∎

Twierdzenie 36

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha$$

Dowód. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \beta(\frac{\beta}{\alpha})^n}{1 + (\frac{\beta}{\alpha})^n} = \alpha.$$

∎

Rozdział 5

Indukcyjne dowody własności liczb Fibonacciego

Wszystkich własności liczb Fibonacciego w tym rozdziale dowodzimy indukcyjnie.

Następujące dwa twierdzenia to wzory na dowolną liczbę Fibonacciego o indeksie nieparzystym (parzystym, odpowiednio).

Twierdzenie 37 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

Dowód. Dla $n = 1$ mamy $F_{2n+1} = F_3 = 2 = 1^2 + 1^2 = F_1^2 + F_2^2 = F_n^2 + F_{n+1}^2$. Dla $n = 2$ mamy $F_{2n+1} = F_5 = 5 = 1^2 + 2^2 = F_2^2 + F_3^2 = F_n^2 + F_{n+1}^2$.

Załóżmy, że $n \geq 2$ i $F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2$ i $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$. Pokażemy, że $F_{2n+3} = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$.

Z definicji liczb Fibonacciego mamy $F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2}$. Ponownie stosując definicję liczb Fibonacciego, otrzymujemy równość $F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n+1}$. Korzystając z tego, że $F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$, dostajemy $2F_{2n+1} + F_{2n} = 2F_{2n+1} + F_{2n+1} - F_{2n-1} = 3F_{2n+1} - F_{2n-1}$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że $3F_{2n+1} - F_{2n-1} = 3(F_n^2 + F_{n+1}^2) - (F_{n-1}^2 + F_n^2) = 2F_n^2 + 3F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$. Stosując proste przekształcenia wykorzystujące jeden ze wzorów skróconego mnożenia, otrzymujemy $2F_n^2 + 3F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n^2 + 2F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n^2 + 2F_{n+1}^2 + (F_n + F_{n+1})^2 - 2F_nF_{n+1} - F_{n-1}^2$. Stosując definicję ciągu Fibonacciego, otrzymujemy wyrażenie $F_n^2 + 2F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - 2F_nF_{n+1} - F_{n-1}^2$. Korzystając z tego, że $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, dostajemy $F_{n+2}^2 + F_n^2 + 2F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) - 2F_nF_{n+1} - F_{n-1}^2 = F_{n+2}^2 + F_n^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}^2$. Ponieważ $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, to $F_{n+2}^2 + F_n^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}^2 = F_{n+2}^2 + F_n^2 + 2F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) - F_{n-1}^2 = F_{n+2}^2 + F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n$. Ponownie stosując wzór na kwadrat sumy, otrzymujemy $F_{n+2}^2 + F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n = F_{n+2}^2 + (F_{n-1} + F_n)^2$. Stosując definicję liczb Fibonacciego, dostajemy $F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$. ■

Twierdzenie 38 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Dowód. Dla $n = 2$ mamy $F_{2n} = F_4 = 3 = 2^2 - 1^2 = F_3^2 - F_1^2 = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$. Dla $n = 3$ mamy $F_{2n} = F_6 = 8 = 3^2 - 1^2 = F_4^2 - F_2^2 = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$.

Załóżmy, że $n \geq 3$ i $F_{2k-2} = F_n^2 - F_{n-2}^2$ oraz $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$. Pokażemy, że $F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$.

Wykonując przekształcenia podobne do zastosowanych w dowodzie poprzedniego twierdzenia, mamy $F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1} + F_{2n} = 2F_{2n} + F_{2n} - F_{2n-2} = 3F_{2n} - F_{2n-2} = 3(F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2) - (F_n^2 - F_{n-2}^2) = 3F_{n+1}^2 - 3F_{n-1}^2 - F_n^2 + F_{n-2}^2 = 3F_{n+1}^2 - 3(F_{n+1} - F_n)^2 + (F_n - F_{n-1})^2 - F_n^2 = 3F_{n+1}^2 - 3F_{n+1}^2 - 3F_n^2 + 6F_nF_{n+1} + F_n^2 + F_{n-1}^2 - 2F_{n-1}F_n - F_n^2 = 6F_nF_{n+1} - 2F_n^2 + F_{n-1}^2 - 2F_{n-1}F_n - F_n^2 = 6F_nF_{n+1} - 2F_n^2 + (F_{n+1} - F_n)^2 - 2F_{n-1}F_n - F_n^2 = 6F_nF_{n+1} - 2F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_n^2 - 2F_nF_{n+1} - 2F_{n-1}F_n - F_n^2 = 4F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_n^2 - 2F_{n-1}F_n - F_n^2 = 2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_n^2 + 2(F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n) - F_n^2 = 2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_n^2 + 2F_n^2 - F_n^2 = (F_n + F_{n+1})^2 - F_n^2 = F_{n+2}^2 - F_n^2$. ■

Twierdzenie 39 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ mamy*

$$3F_n = F_{n-2} + F_{n+2}.$$

Dowód. Dla $n = 3$ mamy $3F_n = 3F_3 = 3 \cdot 2 = 6 = 1 + 5 = F_1 + F_5 = F_{n-2} + F_{n+2}$. Dla $n = 4$ mamy $3F_n = 3F_4 = 3 \cdot 3 = 9 = F_2 + F_6 = F_{n-2} + F_{n+2}$.

Załóżmy, że $n \geq 4$ i $3F_{n-1} = F_{n-3} + F_{n+1}$ i $3F_n = F_{n-2} + F_{n+2}$. Wystarczy pokazać, że $3F_{n+1} = F_{n-1} + F_{n+3}$.

Kilkukrotnie korzystając z definicji liczb Fibonacciego oraz z założenia indukcyjnego, otrzymujemy $3F_{n+1} = 3(F_{n-1} + F_n) = 3F_{n-1} + 3F_n = F_{n-3} + F_{n+1} + F_{n-2} + F_{n+2} = (F_{n-3} + F_{n-2}) + (F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n-1} + F_{n+3}$. ■

Poniższe twierdzenie to wzór na sumę dowolnej liczby początkowych liczb Fibonacciego.

Twierdzenie 40 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Dowód. Dla n=1 mamy $\sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1 = F_{n+2} - 1$.

Załóżmy, że $n \geq 1$ i $\sum_{i=1}^{n} = F_{n+2} - 1$. Pokażemy, że $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1$.

Stosując założenie indukcyjne i definicję ciągu Fibonacciego, dostajemy $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$. ■

Następujące dwa twierdzenia to wzory na sumę dowolnej liczby początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego o wyrazach nieparzystych (parzystych, odpowiednio).

Twierdzenie 41 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Dowód. Dla n=1 mamy $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{1} F_{2i-1} = F_1 = 1 = F_2 = F_{2n}$.
Załóżmy, że $n \geq 1$ i $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$. Należe pokazać, że $\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} = F_{2n+2}$.
Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, łatwo dostajemy $\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$. ■

Twierdzenie 42 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

Dowód. Dla n=1 mamy $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{1} F_{2i} = F_2 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1 = F_{2n+1} - 1$.
Załóżmy, że $n \geq 1$ i $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$. Pokażemy, że $\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} = F_{2n+3} - 1$.
Łatwo widać, że $\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i} + F_{2n+2} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$. ■

Poniższe twierdzenie dotyczy róznicy pomiędzy kwadratem dowolnego wyrazu ciągu Fibonacciego, a iloczynem jego poprzednika i następnika.

Twierdzenie 43 (reguła Cassiniego) *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Dowód. Dla n=2 mamy $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_1F_3 - F_2^2 = 1\cdot 2 - 1^2 = 1 = (-1)^2 = (-1)^n$.
Załóżmy, że $n \geq 2$ i $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$. Wystarczy pokazać, że $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
Stosując kilkukrotnie definicję ciągu Fibonacciego, a na końcu założenie indukcyjne, mamy $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) = F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_{n+1} - F_nF_{n+1} = F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$. ■

Poniższe twierdzenie to wzór na sumę kwadratów dowolnej liczby początkowych liczb Fibonacciego.

Twierdzenie 44 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}.$$

Dowód. Dla $n = 1$ mamy $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = \sum_{i=1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1F_2 = F_nF_{n+1}$.
Załóżmy, że $n \geq 1$ i $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}$. Pokażemy, że $\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1}F_{n+2}$.
Stosując założenie indukcyjne oraz definicję ciągu Fibonacciego, otrzymujemy $\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}$. ■

Rozdział 6

Algebraiczne dowody własności liczb Fibonacciego

W tym rozdziale prezentujemy algebraiczne dowody własności liczb Fibonacciego, czyli dowody w których korzystamy z formuły Bineta.

Twierdzenie 45 *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$3F_n = F_{n-2} + F_{n+2}.$$

Dowód. Z formuły Bineta wiemy, że $F_{n-2}+ F_{n+2} = \frac{\alpha^{n-2}- \beta^{n-2}}{\alpha- \beta} + \frac{\alpha^{n+2}- \beta^{n+2}}{\alpha- \beta}$. Wyłączając wspólny mianownik przed nawias otrzymujemy wyrażenie $\frac{1}{\alpha- \beta}[\alpha^{n-2}(1+ \alpha^4)- \beta^{n-2}(1+ \beta^4)]$. Korzystając ze wzoru na n-tą potęgę liczby α (β, odpowiednio), otrzymujemy równość $\frac{1}{\alpha- \beta}[\alpha^{n-2}(1+ \alpha^4) - \beta^{n-2}(1+ \beta^4)] = \frac{1}{\alpha- \beta}[\alpha^{n-2}(1+ F_4\alpha+ F_3) - \beta^{n-2}(1+ F_4\beta+ F_3)]$ $= \frac{1}{\alpha- \beta}[\alpha^{n-2}(3\alpha + 3) - \beta^{n-2}(3\beta + 3)]$. Wiedząc, że $\alpha + 1 = \alpha^2$ oraz $\beta + 1 = \beta^2$, otrzymujemy wyrażenie $\frac{3}{\alpha- \beta}(\alpha^n - \beta^n)$. Mamy $\frac{3}{\alpha- \beta}(\alpha^n - \beta^n) = 3\frac{\alpha^n- \beta^n}{\alpha- \beta}$, co na mocy formuły Bineta jest równe $3F_n$. ∎

Poniższe twierdzenie to wzór na sumę dowolnej liczby początkowych liczb Fibonacciego.

Twierdzenie 46 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:
$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} = -\alpha^2$,
$\frac{\beta}{1-\beta} = -\beta^2$.

Mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_i &= F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} + F_n \\
&= \tfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} + \tfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} + ... + \tfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}[\alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^n - (\beta + \beta^2 + ... + \beta^n)] \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha\tfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - \beta\tfrac{1-\beta^n}{1-\beta}) \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^2(\alpha^n-1) - \beta^2(\beta^n-1)] \\
&= \tfrac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} - \tfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} \\
&= F_{n+2} - F_2 \\
&= F_{n+2} - 1.
\end{aligned}$$

■

Następujące dwa twierdzenia to wzory na dowolną liczbę Fibonacciego o indeksie nieparzystym (parzystym, odpowiednio).

Twierdzenie 47 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:
$\frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha}{1-\alpha-1} = \frac{\alpha}{-\alpha} = -1,$
$\frac{\beta}{1-\beta^2} = -1.$
Stosując formułę Bineta, łatwo dostajemy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} &= F_1 + F_2 + ...F_{2n-3} + F_{2n-1} \\
&= \tfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} + \tfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta} + ... + \tfrac{\alpha^{2n-3}-\beta^{2n-3}}{\alpha-\beta} + \tfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha-\beta} \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}[\alpha + \alpha^3 + ... + \alpha^{2n-3} + \alpha^{2n-1} - (\beta + \beta^3 + ... + \beta^{2n-3} + \beta^{2n-1})] \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha\tfrac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} - \beta\tfrac{1-\beta^{2n}}{1-\beta^2}) \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{2n} - \beta^{2n} + 1 - 1) \\
&= F_{2n}.
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 48 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:
$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha-1} = \frac{\alpha^2}{-\alpha} = -\alpha,$
$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = -\beta.$

Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, łatwo otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{2i} &= F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n-2} + F_{2n} \\
&= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta} + \ldots + \frac{\alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n-2} + \alpha^{2n} - (\beta^2 + \beta^4 + \ldots + \beta^{2n-2} + \beta^{2n})] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^2 \frac{1-(\alpha^2)^n}{1-\alpha^2} - \beta^2 \frac{1-(\beta^2)^n}{1-\beta^2}) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{2n+1} - \alpha - \beta^{2n+1} + \beta) \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha-\beta} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} \\
&= F_{2n+1} - 1.
\end{aligned}$$

■

Poniższe twierdzenie dotyczy róznicy pomiędzy kwadratem dowolnej liczby Fibonacciego, a iloczynem jej poprzednika i następnika.

Twierdzenie 49 (uogólniona reguła Cassiniego) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:

$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha-1} = \frac{\alpha^2}{-\alpha} = -\alpha,$

$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = -\beta.$

Mamy

$$\begin{aligned}
F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - (\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta})^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[\alpha^{2n} + \beta^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n] \\
&= \frac{1}{5}[(\alpha\beta)^{n-1}(\beta^2 + \alpha^2) + 2(\alpha\beta)^n] \\
&= \frac{1}{5}[-3(\alpha\beta)^{n-1} + 2(\alpha\beta)^n] = \frac{5(\alpha\beta)^n}{5} \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

■

Następujące dwa twierdzenia to wzory na dowolną liczbę Fibonacciego o indeksie nieparzystym (parzystym, odpowiednio).

Twierdzenie 50 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:

$\frac{1+\alpha^2}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{\alpha^2-\alpha\beta} = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{\alpha^2+1} = \alpha,$

$\frac{1+\beta^2}{\alpha-\beta} = \frac{\beta(1+\beta^2)}{\alpha\beta-\beta^2} = \frac{\beta(1+\beta^2)}{-1-\beta^2} = -\beta.$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F_n^2 + F_{n+1}^2 &= (\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta})^2 + (\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta})^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}[\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{n+1}] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^{2n}\frac{1+\alpha^2}{\alpha-\beta} + 2(-1)^n + \beta^{2n}\frac{1+\beta^2}{\alpha-\beta} - 2(-1)^n] \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta} \\
&= F_{2n+1}.
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 51 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:

$$\frac{\alpha^4 - 1}{(\alpha - \beta)\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} - \frac{(\frac{1}{\alpha})^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} - \frac{(-\beta)^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1,$$

$$\frac{\beta^4 - 1}{(\alpha - \beta)\beta^2} = \frac{\beta^2}{\alpha - \beta} - \frac{(\frac{1}{\beta})^2}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^2}{\alpha - \beta} - \frac{(-\alpha)^2}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha - \beta} = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = -(\alpha + \beta) = -1.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2(\alpha\beta)^{n+1} - \alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2} + 2(\alpha\beta)^{n-1}] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^{2n}\frac{\alpha^4+1}{(\alpha-\beta)\alpha^2} - \beta^{2n-2}\frac{\beta^4+1}{(\alpha-\beta)\beta^2} + 2(-1)^{n-1}] \\
&= \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\
&= F_{2n}.
\end{aligned}$$

■

Poniższe twierdzenie to wzór na sumę kwadratów dowolnej liczby początkowych liczb Fibonacciego.

Twierdzenie 52 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha + 1}{1 - \alpha - 1} = \frac{\alpha + 1}{-\alpha} = -1 - \frac{1}{\alpha} = -\alpha - \beta + \beta = -\alpha,$$

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{\beta + 1}{1 - \beta - 1} = \frac{\beta + 1}{-\beta} = -1 - \frac{1}{\beta} = -\alpha - \beta + \alpha = -\beta,$$

$$\frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} = \frac{-2}{1 - (-1)} = -1.$$

Korzystając z formuły Bineta, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{n} F_i^2 &= F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 \\
&= \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}[\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\beta) + \alpha^4 + \beta^4 - 2(\alpha\beta)^2 \\
&+ \ldots + \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n] \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\{\alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n} + \beta^2 + \beta^4 + \ldots + \beta^{2n} \\
&- 2[\alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + \ldots + (\alpha\beta)^n]\} \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}[\alpha^2\frac{1 - (\alpha^2)^n}{1 - \alpha^2} + \beta^2\frac{1 - (\beta^2)^n}{1 - \beta^2} - 2\alpha\beta\frac{(1 - (\alpha\beta)^n)}{1 - \alpha\beta}] \\
&= \frac{-\alpha(1 - \alpha^{2n}) - \beta(1 - \beta^{2n}) + 1 - (\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{-\alpha + \alpha^{2n+1} - \beta + \beta^{2n+1} + 1 - (\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - (\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - (\alpha\beta)^n(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - \alpha^{n+1}\beta^n - \alpha^n\beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\
&= F_n F_{n+1}.
\end{aligned}$$

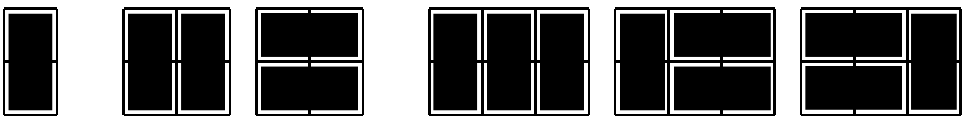
■

Rozdział 7

Kombinatoryczne dowody własności liczb Fibonacciego

W tym rozdziale prezentujemy kombinatoryczne dowody własności liczb Fibonacciego.

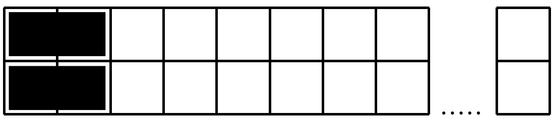
Rozpatrzmy klocki domina o wymiarach 2×1 i pole o wymiarach $2 \times\ n$, gdzie n jest liczbą naturalną. Kratki naszego pola są oznaczone następująco: górne od lewej do prawej liczbami $1, 2, ..., n$, a dolne od lewej do prawej symbolami $1', 2', ..., n'$. Przez kolumnę o indeksie i rozumiemy zbiór dwóch kratek o indeksach i oraz i'. Przez pozycję klocka domina rozumiemy zbiór pól, na których ten klocek leży. Pokrycie pola to zbiór pozycji klocków domina, które pokrywają to pole. Dwa pokrycia są różne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie zbiory pozycji są różne. Niech a_n będzie liczbą różnych pokryć pola o wymiarach $2 \times\ n$. Ilustracje z rysunku pierwszego pokazują, że $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i $a_3 = 3$. Przyjmujemy także, że $a_0 =\ 1$.



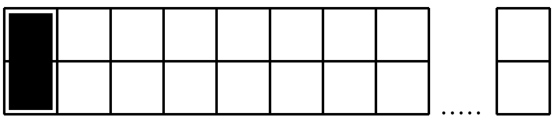
Rysunek 1

Lemat 53 *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geq 3$ *mamy* $a_n =\ a_{n-2} +\ a_{n-1}$.

Dowód. Jeśli chcemy pokryć pole o wymiarach $2 \times\ n$, to klocek domina na polu 1 możemy położyć poziomo (rysunek 2) albo pionowo (rysunek 3).



Rysunek 2



Rysunek 3

Jeśli klocek domina na polu 1 leży poziomo, to musimy pokryć pozostałe pole o wymiarach $2\times\ (n-2)$. Jest a_{n-2} możliwości dokonania tego.

Jeśli ten klocek leży pionowo, to musimy pokryć pozostałe pole o wymiarach $2\times\ (n-1)$. Jest a_{n-1} możliwości dokonania tego.

Dodając te liczby, otrzymujemy równość $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. ■

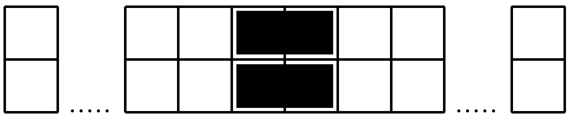
Twierdzenie 54 *Dla każdej liczby naturalnej n mamy $a_n = F_{n+1}$.*

Dowód. Ponieważ $a_1 = 1 = F_2$ i $a_2 = 2 = F_3$ oraz ta sama rekurencyjna zasada obowiązuje dla obu tych ciągów, to $a_n = F_{n+1}$. ■

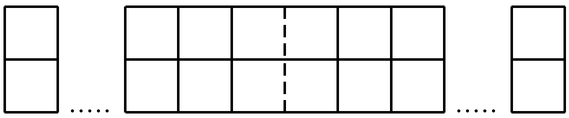
Twierdzenie 55 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

Dowód. Wobec poprzedniego twierdzenia, powyższa równość jest równoważna temu, że $a_{2n} = a_{n-1}^2 + a_n^2$. Rozpatrzmy dwie połowy pola o wymiarach $2\times 2n$ (dwa pola o wymiarach $2\times\ n$ każde). Jeśli pokrywamy pole o wymiarach $2\times 2n$, to jego połowy mają wspólne domino (rysunek 4) albo nie mają wspólnego domino (rysunek 5).



Rysunek 4



Rysunek 5

W pierwszym przypadku pozostaje nam pokryć niezależnie dwa pola o wymiarach $2\times\ (n-1)$ każde, więc jest a_{n-1}^2 możliwości dokonania tego.

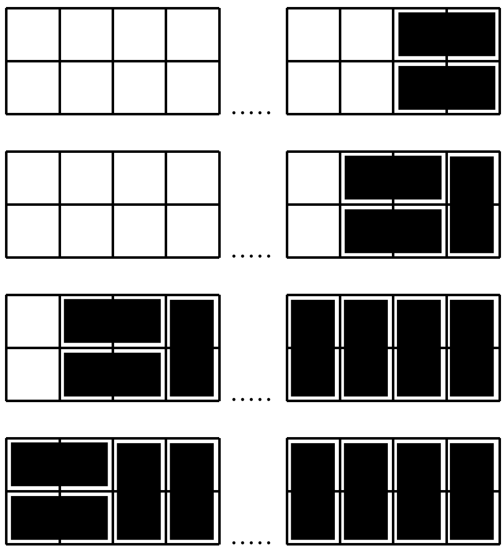
W drugim przypadku musimy pokryć niezależnie dwa pola o wymiarach $2\times\ n$ każde. Jest a_n^2 możliwośći dokonania tego.

Dodając te liczby, otrzymujemy równość $a_{2n} = a_{n-1}^2 + a_n^2$. ■

Twierdzenie 56 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Dowód. Powyższy zwiaązek jest równoważny temu, że dla każdej całkowitej nieujemnej liczby n mamy $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_{n+1} - 1$. Rozpatrzmy możliwe pokrycia pola o wymiarach $2\times\ (n+1)$ klockami domina za wyjątkiem pokrycia, w którym wszystkie klocki są ułożone pionowo. Jest $a_{n+1} - 1$ takich pokryć. Spróbujmy inaczej policzyć te pokrycia. Ponieważ nie zliczamy tego pokrycia, w którym wszystkie klocki domina są ustawione pionowo, to w każdym zliczanym przez nas pokryciu istnieje co najmniej jedna para klocków domina ułożonych poziomo (jeden nad drugim). Rozpatrzmy parę indeksów kolumn, na których leży znajdująca się najbardziej na prawo para klocków domina ułożonych poziomo. „Największa" taka możliwa para to (n,n+1), a „najmniejsza" to (1,2). Na rysunku 6 znajdują się kolejno przykłady dla sytuacji, gdy tą parą jest $(n, n+1)$, $(n-1, n)$, $(2, 3)$ lub $(1, 2)$.



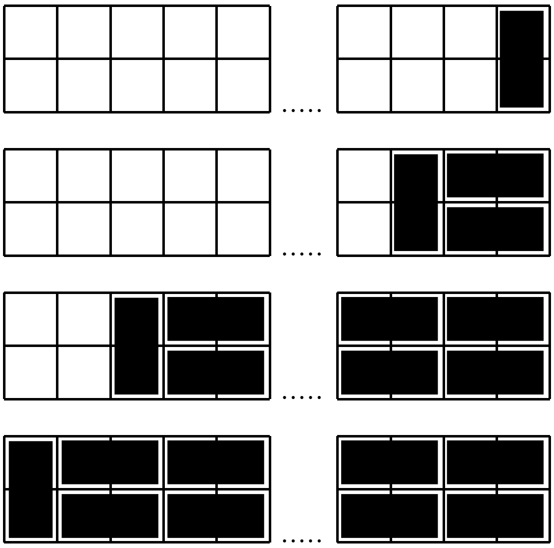
Rysunek 6

Jest a_{n-1} możliwości pokrycia pola o wymiarach $2\times\ (n+1)$ tak, by ostatnia spośród par klocków domina ułożonych poziomo leżała w kolumnach o indeksach n i $n+1$. Jest a_0 możliwości pokrycia pola o wymiarach $2\times\ (n+1)$ tak, by ostatnia spośród par klocków domina ułożonych poziomo leżała w kolumnach o indeksach 1 i 2. Zatem liczba możliwych pokryć pola o wymiarach $2\times\ (n+1)$ klockami domina za wyjątkiem pokrycia, w którym wszystkie klocki są ułożone pionowo to $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$. Skoro na dwa sposoby zliczyliśmy to samo, to $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_{n+1} - 1$. ■

Twierdzenie 57 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Dowód. Powyższe twierdzenie jest równoważne temu, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n mamy $\sum_{i=0}^{n-1} a_{2i} = a_{2n-1}$. Rozpatrzmy wszystkie możliwe pokrycia pola o wymiarach $2\times\ (2n-1)$. Jest a_{2n-1} takich pokryć. Spróbujmy inaczej policzyć te pokrycia. Ponieważ nasze pole ma nieparzystą długość, to każde jego pokrycie musi posiadać co najmniej jedno domino ułożone pionowo. Rozpatrzmy indeks kolumny, na której leży znajdujące się najbardziej na prawo domino ułożone pionowo. Ten indeks jest nieparzysty, bo pole na prawo od tego klocka ma parzystą długość, skoro jest pokryte jedynie klockami ułożonymi poziomo, a całe nasze pole ma nieparzystą długość. Największy możliwy indeks kolumny, na której leży znajdujące się najbardziej na prawo domino ułożone pionowo to $2n-1$. Najmniejszy możliwy indeks kolumny, na której leży znajdujące się najbardziej na prawo domino ułożone pionowo to 1. Na rysunku 7 znajdują się przykłady kolejno dla sytuacji, gdy ten indeks to $2n-1$, $2n-3$, 3 lub 1.



Rysunek 7

Jest a_{2n-2} możliwości zapełnienia pola o wymiarach $(2n-1)\times 2$ tak, by ostatni klocek ułożony pionowo pokrywał kolumnę o indeksie $2n-1$. Jest a_{2n-4} możliwości zapełnienia pola o wymiarach $(2n-1)\times 2$ tak, by ostatni klocek ułożony pionowo pokrywał kolumnę o indeksie $2n-3$. Jest a_2 możliwości zapełnienia pola o wymiarach $(2n-1)\times 2$ tak, by ostatni klocek ułożony pionowo pokrywał kolumnę o indeksie 3. Jest a_0 możliwości zapełnienia pola o wymiarach $(2n-1)\times 2$ tak, by ostatni klocek ułożony pionowo pokrywał kolumnę o indeksie 1. Zatem mamy $a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n-4} + a_{2n-2} = a_{2n-1}$. ■

Twierdzenie 58 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ mamy*

$$3F_n = F_{n-2} + F_{n+2}.$$

Dowód. Powyższe twierdzenie jest równoważne temu, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ mamy $3a_{n-1} = a_{n-3} + a_{n+1}$. Udowodnimy tę równość ustalając stosunek jak 1 do 3 pomiędzy mocami pewnych zbiorów. Zbiór możliwych pokryć pola o wymiarach $2\times (n-1)$ ma a_{n-1} elementów. Zbiór będący sumą zbioru możliwych pokryć pola o wymiarach $2\times (n-3)$ oraz zbioru możliwych pokryć pola o wymiarach $2\times (n+1)$ ma $a_{n-3} + a_{n+1}$ elementów.

Teraz ustalimy stosunek jak 1 do 3 pomiędzy mocami tych zbiorów.
Z każdego pokrycia pola o wymiarach $2\times (n-1)$ utworzymy pokrycie pola o wymiarach $2\times (n-3)$ lub pola o wymiarach $2\times (n+1)$ w następujący sposób:

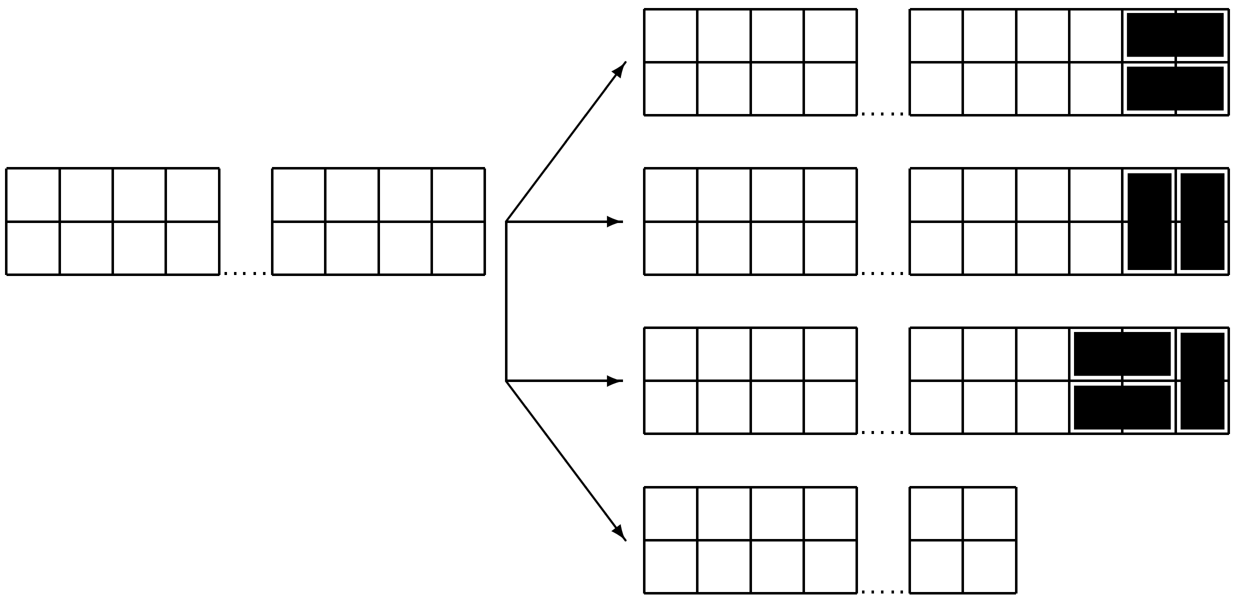
(I) Do danego pokrycia pola o wymiarach $2\times\ (n-1)$ dokładamy dwa klocki domina ułożone poziomo (jeden nad drugim) - uzyskujemy pokrycie pola o wymiarach $2\times\ (n+1)$.

(II) Do danego pokrycia pola o wymiarach $2\times\ (n-1)$ dokładamy dwa klocki domina ułożone pionowo - uzyskujemy pokrycie pola o wymiarach $2\times\ (n+1)$.

(IIIa) Jeśli w danym pokryciu pola o wymiarach $2\times\ (n-1)$ na kolumnie o indeksie $n+1$ leży domino ułożone pionowo, to wówczas to domino przenosimy na kolumnę o indeksie $n+1$, a kolumny o indeksach $n-1$ oraz n pokrywamy dwoma klockami domina ułożonymi poziomo (jeden nad drugim).

(IIIb) Jeśli w danym pokryciu pola o wymiarach $2\times\ (n-1)$ na kolumnach o indeksach $n-2$ oraz $n-1$ leżą dwa domino ułożone poziomo (jeden nad drugim), to usuwamy te domino i otrzymujemy pokrycie pola o wymiarach $2\times\ (n-3)$.

Rysunek 8 przedstawia opisany sposób tworzenia nowych pokryć.



Rysunek 8

■

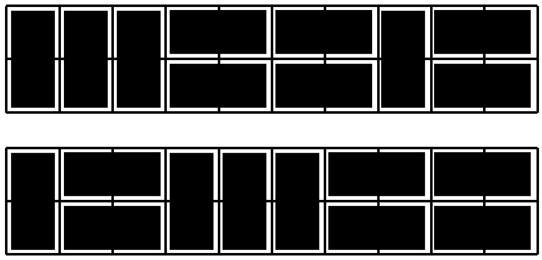
Pary pokryć

Teraz wprowadzimy technikę zamiany końcówek dwóch pokryć, która okazuje się być bardzo przydatna.

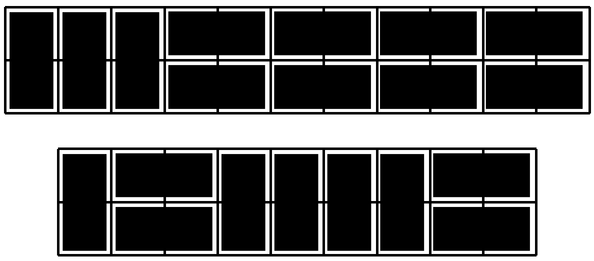
Mówimy, że pokrycie jest łamliwe za kolumną o indeksie i, jeśli to pokrycie pokrywa kolumnę o indeksie i oraz nie posiada domino leżącego jednocześnie na kolumnach o indeksach i oraz $i+1$.

Mówimy, że para pokryć jest łamliwa za kolumną o indeksie i, jeśli co najmniej jedno z tych pokryć pokrywa kolumny o indeksach i oraz $i+\ 1$, oraz żadne z tych dwóch pokryć nie posiada domino leżącego jednocześnie na obu tych kolumnach. Przez końcówki pary pokryć rozumiemy te dwa pokrycia, które są częściami leżącymi na prawo od kolumny o najwyższym indeksie, za którą dana para pokryć jest łamliwa. Zauważmy, że jeśli zamienimy końcówki dwóch pokryć, to nowopowstała para pokryć jest łamliwa za tymi samymi kolumnami, co wyjściowa para pokryć.

Rozpatrzmy parę pokryć pól o wymiarach 2×10 każde, jak na rysunku 9. Pierwsze pokrywa kolumny od 1 do 10, drugie pokrywa kolumny od 2 do 11. Para pokryć na tym rysunku jest łamliwa za kolumnami o indeksach 1, 2, 5 i 7. Jeśli zamienimy końcówki pokryć z rysunku 9, to otrzymamy parę pokryć pól o wymiarach 2×11 oraz 2×9, jak na rysunku 10.



Rysunek 9



Rysunek 10

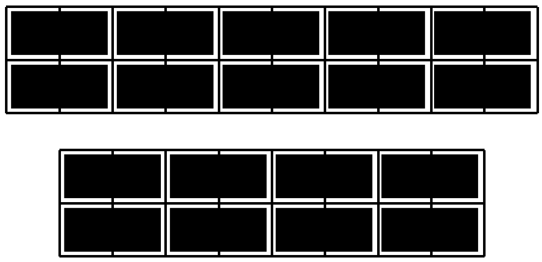
Twierdzenie 59 (reguła Cassiniego) *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Dowód. Powyższe twierdzenie jest równoważne temu, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ mamy $a_{n-2}a_n - a_{n-1}^2 = (-1)^n$, czyli $a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n + (-1)^{n+1}$. Rozpatrzmy następujące dwa zbiory. Zbiór par pokryć pól o wymiarach $2 \times n$ każde. Ten zbiór ma a_n^2 elementów. Zbiór par pokryć pola o wymiarach $2 \times (n-1)$ i pola o wymiarach $2 \times (n+1)$. Ten zbiór ma $a_{n-1}a_{n+1}$ elementów. Teraz ustalimy odpowiedniość pomiędzy tymi zbiorami z uwzględnieniem „błędu” $(-1)^n$ zależnego od parzystości n.

Jeśli n jest nieparzyste, to oba pokrycia pola o wymiarach $2 \times n$ mają co najmniej jeden klocek domina ułożony pionowo. Zauważmy, że jeśli kolumna o indeksie i jest pokryta klockiem domina ułożonym pionowo, to dana para pokryć jest łamliwa za kolumną o indeksie $i-1$ lub i. Zamieniając końcówki tych dwóch pokryć pól otrzymujemy pokrycia pól o wymiarach $2\times (n-1)$ oraz $2\times (n+1)$, które są łamliwe za tymi samymi kolumnami co tamte dwa pokrycia. To ustala równoliczność zbioru par pokryć pól o wymiarach $2\times n$ oraz zbioru par pokryć pól o wymiarach $2 \times (n-1)$ i $2 \times (n+1)$, które są łamliwe za co najmniej jedną kolumną. Czy jest możliwe, aby para pokryć pól o wymiarach $2\times (n-1)$ i $2 \times (n+1)$ nie była łamliwa za żadną kolumną? Tak, wtedy i tylko wtedy, gdy w obu pokryciach wszystkie klocki domina są ułożone poziomo. Przykład takiej sytuacji jest na rysunku 11. Zatem $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} - 1$.

Jeśli n jest parzyste, to zamiana końcówek ustala równoliczność zbioru par pokryć pól o wymiarach $2\times n$ każde oraz zbioru par pokryć pól o wymiarach $2\times (n+1)$ i $2\times (n-1)$, które są łamliwe. Istnieje dokładnie jedna para pokryć pól o wymiarach $2 \times n$ każde, która nie jest łamliwa, jest tak, gdy w obu pokryciach wszystkie klocki domina są ułożone poziomo. Przykład takiej sytuacji ilustruje rysunek 12. Zatem $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} + 1$.



Rysunek 11

Rysunek 12

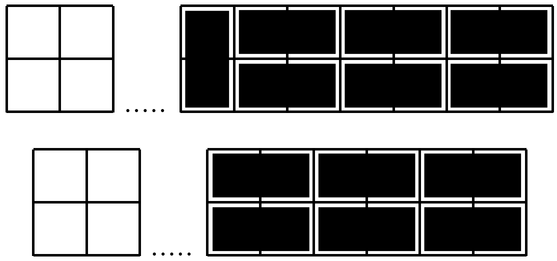
■

Twierdzenie 60 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}.$$

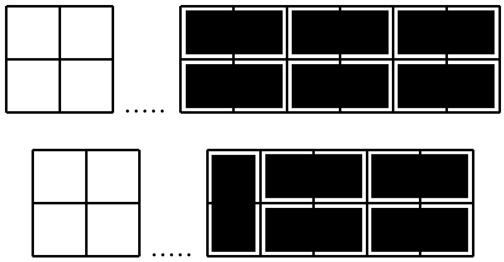
Dowód. Powyższe twierdzenie jest równoważne temu, że dla każdej liczby naturalnej n mamy $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 = a_{n-1}a_n$. Jest $a_{n-1}a_n$ par pokryć pól o wymiarach $2 \times (n-1)$ i $2\times n$. Spróbujmy inaczej policzyć te pokrycia. Umieśćmy pole o wymiarach $2\times n$ nad polem o wymiarach $2 \times (n-1)$ tak, aby zaczynały się równo. Rozpatrzmy największy spośród indeksów kolumn, za którymi dana para pokryć jest łamliwa. Ponieważ oba pola zaczynają się kolumną o indeksie 1, to na potrzeby tego dowodu przyjmijmy, że każda para pokryć jest łamliwa za kolumną o indeksie 0. Policzmy dla ilu par pokryć pól o wymiarach $2\times n$ oraz $2\times (n-1)$ największy indeks kolumny, za którą ta para pokryć jest łamliwa to i. Jest a_i^2 sposobów pokrycia obu tych pól aż do i-tej kolumny. Aby dana para pokryć nie była łamliwa za żadną kolumną o wyższym indeksie, to te pokrycia trzeba dokończyć w następujący jedyny sposób:

jeśli $n-k$ jest nieparzyste, to sposób tego dokończenia ilustruje rysunek 13,



Rysunek 13

jeśli $n-k$ jest parzyste, to sposób tego dokończenia ilustruje rysunek 14.



Rysunek 14

Sumując liczby tych możliwości po wszystkich możliwych wartościach i otrzymujemy $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2$ pokryć. Zatem $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 = a_{n-1}a_n$. ■

Rozdział 8

Niestandardowe dowody własności liczb Fibonacciego

W tym rozdziale prezentujemy niestandardowe dowody własności liczb Fibonacciego, czyli dowody nienależące do żadnej z wcześniejszych grup.

Twierdzenie 61 *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ mamy*

$$3F_n = F_{n-2} + F_{n+2}.$$

Dowód. Kilkukrotnie korzystając z definicji ciągu Fibonacciego otrzymujemy $F_{n-2} + F_{n+2} = F_n - F_{n-1} + F_n + F_{n+1} = 2F_n + F_{n+1} - F_n = 3F_n$. ■

Poniższe twierdzenie to wzór na sumę dowolnej liczby początkowych liczb Fibonacciego.

Twierdzenie 62 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Dowód. Stosując definicję ciągu Fibonacciego do każdego wyrazu sumy, oraz redukując odpowiednie wyrazy, otrzymujemy $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} + F_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + ... + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1}) = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$. ■

Następujące dwa twierdzenia to wzory na sumę dowolnej liczby początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego o wyrazach nieparzystych (parzystych, odpowiednio).

Twierdzenie 63 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Dowód. Analogicznie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, mamy $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_1 + F_3 + ... + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_2 + (F_4 - F_2) + ... + (F_{2n-2} - F_{2n-4}) + (F_{2n} - F_{2n-2}) = F_{2n}$. ■

Twierdzenie 64 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby naturalnej* n *mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

Dowód. Podobnie jak wcześniej, łatwo dostajemy $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n}$ $= (F_3 - F_1) + (F_5 - F_3) + \ldots + (F_{2n-1} - F_{2n-3}) + (F_{2n+1} - F_{2n-1}) = F_{2n+1} - F_1 = F_{2n+1} - 1.$ ■

Poniższe twierdzenie dotyczy róznicy pomiędzy kwadratem dowolnej liczby Fibonacciego, a iloczynem jej poprzednika i następnika.

Twierdzenie 65 (reguła Cassiniego) *Dla każdej liczby naturalnej* n *mamy*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Dowód. Wielokrtonie studiując definicję ciągu Fibonacciego oraz wykonując odpowiednie przekształcenia, dostajemy $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) - F_n(F_{n-2} + F_{n-1}) = F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_n - F_{n-1}F_n = F_{n-1}^2 - F_{n-2}F_n = -(F_{n-2}F_n - F_{n-1}^2) = -(F_{n-2}^2 - F_{n-3}F_{n-1}) = F_{n-3}F_{n-1} - F_{n-2}^2 = \ldots.$
Jeśli n jest parzyste, to $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_1F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 3 - 2^2 = 1 = (-1)^n$.
Jeśli n jest nieparzyste, to $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_2F_4 - F_3^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = -1 = (-1)^n$. ■

Rozdział 9

Dodatkowa własność liczb Fibonacciego z dowodem indukcyjnym

W tym rozdziale dowodzimy indukcyjnie dodatkowej własności liczb Fibonacciego.

Twierdzenie 66 (Rao, 1953) *Dla każdej liczby naturalnej n mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = \frac{1}{5}(3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5).$$

Dowód. Dla $n = 1$ mamy $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 = \sum_{i=1}^{1} F_{2i}^2 = F_2^2 = 1^2 = 1$, $\frac{1}{5}(3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5) = \frac{1}{5}(3F_3^2 + 2F_4^2 - 6F_2F_4 - 2 - 5) = \frac{1}{5}(3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 1 \cdot 3 - 7) = \frac{1}{5}(12 + 18 - 18 - 7) = \frac{5}{5} = 1$.

Załóżmy, że $n \geq 1$ i $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = \frac{1}{5}(3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5)$. Pokażemy, że $5\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i}^2 = 3F_{2n+3}^2 + 2F_{2n+4}^2 - 6F_{2n+2}F_{2n+4} - 2n - 7$.

Wielokrotnie stosując definicję ciągu Fibonacciego oraz założenie indukcyjne, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
5\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i}^2 &= 5(\textstyle\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 + F_{2n+2}^2) = 5\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 + 5F_{2n+2}^2 \\
&= 3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5 + 5F_{2n+2}^2 \\
&= 3(F_{2n+3} - F_{2n+2})^2 + 7F_{2n+2}^2 - 6(F_{2n+2} - F_{2n+1})F_{2n+2} - 2n - 5 \\
&= 3F_{2n+2}^2 + 3F_{2n+3}^2 - 6F_{2n+2}F_{2n+3} \\
&+ 7F_{2n+2}^2 - 6F_{2n+2}^2 + 6F_{2n+1}F_{2n+2} - 2n - 5 \\
&= 4F_{2n+2}^2 + 3F_{2n+3}^2 - 6F_{2n+2}(F_{2n+3} - F_{2n-1}) - 2n - 5 \\
&= 4F_{2n+2}^2 + 3F_{2n+3}^2 - 6F_{2n+2}^2 - 2n - 5 \\
&= -2F_{2n+2}^2 + 3F_{2n+3}^2 - 2n - 5 \\
&= 3F_{2n+3}^2 - 2F_{2n+2}^2 - 2n - 5 \\
&= 3F_{2n+3}^2 - 2F_{2n+2}^2 - 2n - 7 - 2(-1)^{2n+3} \\
&= 3F_{2n+3}^2 - 2F_{2n+2}^2 - 2n - 7 - 2(F_{2n+2}F_{2n+4} - F_{2n+3}^2) \\
&= 3F_{2n+3}^2 - 2F_{2n+2}^2 - 2n - 7 + 2(F_{2n+4} - F_{2n+2})^2 - 2F_{2n+2}F_{2n+4} \\
&= 3F_{2n+3}^2 - 2F_{2n+2}^2 - 2n - 7 \\
&+ 2F_{2n+2}^2 + 2F_{2n+4}^2 - 4F_{2n+2}F_{2n+4} - 2F_{2n+2}F_{2n+4} \\
&= 3F_{2n+3}^2 + 2F_{2n+4}^2 - 6F_{2n+2}F_{2n+4} - 2n - 7.
\end{aligned}$$

■

Rozdział 10

Dodatkowe własności liczb Fibonacciego i Lucasa z dowodami algebraicznymi

W tym rozdziale dowodzimy algebraicznie dodatkowych własności liczb Fibonacciego i Lucasa.

Twierdzenie 67 (Wall, 1964) *Dla dowolnych liczb całkowitych m oraz n mamy*

$$L_{2m}L_{2n} = L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2.$$

Dowód. Łatwo przekształcamy lewą stronę równania:

$$\begin{aligned} L_{2m}L_{2n} &= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

Stosując formułę Bineta oraz proste przekształcenia, oraz fakt, że $\alpha\beta = -1$, otrzymujemy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned} L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2 &= (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n})^2 + 5(\tfrac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha-\beta})^2 \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} - 2(\alpha\beta)^{m-n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + 2(\alpha\beta)^{m+n} \\ &+ (\alpha\beta)^{2n}[\alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} - 2(\alpha\beta)^{m-n}] \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m} - 2(\alpha\beta)^{m+n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 68 (Lind i Hoggatt, Jr., 1964) *Dla dowolnych liczb całkowitych m oraz n mamy*

$$L_{2m}L_{2n} = 5F_{m+n}^2 + L_{m-n}^2.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} L_{2m}L_{2n} &= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

Prawdziwy jest następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned} 5F_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 &= 5\left(\frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\alpha - \beta}\right)^2 + (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})^2 \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} - 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} + 2(\alpha\beta)^{m-n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} - 2(\alpha\beta)^{m+n} \\ &+ (\alpha\beta)^{2n}[\alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} + 2(\alpha\beta)^{m-n}] \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} - 2(\alpha\beta)^{m+n} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m} + 2(\alpha\beta)^{m+n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 69 (Lind i Hoggatt, Jr., 1964) *Dla dowolnych liczb całkowitych m oraz n mamy*

$$L_{2m}L_{2n} = L_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 - 4(-1)^{m+n}.$$

Dowód. Łatwo dostajemy

$$\begin{aligned} L_{2m}L_{2n} &= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} L_{m+n}^2 + L_{m-n}^2 - 4(-1)^{m+n} &= (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n})^2 + (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})^2 - 4(-1)^{m+n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + 2(\alpha\beta)^{m+n} \\ &+ \alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} + 2(\alpha\beta)^{m-n} - 4(-1)^{m+n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + 2(\alpha\beta)^{m+n} \\ &+ (\alpha\beta)^{2n}[\alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} + 2(\alpha\beta)^{m-n}] - 4(-1)^{m+n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + 2(\alpha\beta)^{m+n} \\ &+ \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m} + 2(\alpha\beta)^{m+n} - 4(\alpha\beta)^{m+n} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 70 (Koshy, 1998) *Dla dowolnych liczb całkowitych m oraz n mamy*

$$L_{2m+2n} + L_{2m-2n} = L_{2m}L_{2n}.$$

Dowód. Łatwo dostajemy

$$\begin{aligned} L_{2m+2n} + L_{2m-2n} &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + (\alpha\beta)^{2n}(\alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)}) \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

Oczywiste jest, że

$$\begin{aligned} L_{2m}L_{2n} &= (\alpha^{2m} + \beta^{2m})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} + \alpha^{2m}\beta^{2n} + \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 71 (Koshy, 1998) *Dla dowolnych liczb całkowitych* m *oraz* n *mamy*

$$L_{2m+2n} - L_{2m-2n} = 5F_{2m}F_{2n}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} L_{2m+2n} - L_{2m-2n} &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} - \left(\alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)}\right) \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} - (\alpha\beta)^{2n}\left(\alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)}\right) \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} - \alpha^{2m}\beta^{2n} - \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

Łatwo dostajemy

$$\begin{aligned} 5F_{2m}F_{2n} &= \tfrac{\alpha^{2m}-\beta^{2m}}{\alpha-\beta}\tfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\ &= \alpha^{2(m+n)} + \beta^{2(m+n)} - \alpha^{2m}\beta^{2n} - \alpha^{2n}\beta^{2m}. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 72 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby całkowitej* n *mamy*

$$L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} 5F_{2n}^2 + 2 &= 5\left(\tfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)^2 + 2 \\ &= \alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2(\alpha\beta)^{2n} + 2 \\ &= \alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2(-1)^{2n} + 2 \\ &= \alpha^{4n} + \beta^{4n}, \end{aligned}$$

co na mocy formuły Bineta jest równe L_{4n}. ■

Twierdzenie 73 (Lucas, 1876) *Dla każdej liczby całkowitej* n *mamy*

$$L_{4n+2} = 5F_{2n+1}^2 - 2.$$

Dowód. Łatwo otrzymujemy

$$\begin{aligned} 5F_{2n+1}^2 - 2 &= 5\left(\tfrac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2 - 2 \\ &= \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2(\alpha\beta)^{2n+1} - 2 \\ &= \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2(-1)^{2n+1} - 2 \\ &= \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2}, \end{aligned}$$

a z formuły Bineta wiemy, że to jest równe L_{4n+2}. ■

Twierdzenie 74 (Candido, 1905) *Dla każdej liczby całkowitej* n *mamy*

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2.$$

Dowód. Mamy $(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 = F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4 + 2(F_nF_{n+1})^2 + 2(F_nF_{n+2})^2 + 2(F_{n+1}F_{n+2})^2$, więc wystarczy udowodnić, że $F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4 = 2(F_nF_{n+1})^2 + 2(F_nF_{n+2})^2 + 2(F_{n+1}F_{n+2})^2$.

Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:

$1 + \alpha^4 + \alpha^8 = 1 + F_4\alpha + F_3 + F_8\alpha + F_9 = 1 + 3\alpha + 2 + 21\alpha + 13 = 24\alpha + 16,$

$1 + \beta^4 + \beta^8 = 24\beta + 16,$

$1 + \alpha^3\beta + \alpha^6\beta^2 = 1 - \alpha^2 + \alpha^4 = 1 - \alpha - 1 + 3\alpha + 2 = 2\alpha + 2 = 2\alpha^2,$

$1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^6 = 2\beta + 2 = 2\beta^2,$

$\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 = \alpha + 1 + F_4\alpha + F_3 + F_6\alpha + F_5 = \alpha + 1 + 3\alpha + 2 + 8\alpha + 5 = 12\alpha + 8,$

$\beta^2 + \beta^4 + \beta^6 = 12\beta + 8,$

$\beta^2 + \alpha^2 - 2 - 2 + \beta^4 + \alpha^4 + 2 + 2 + \beta^2 + \alpha^2 - 2 - 2 = \beta + 1 + \alpha + 1 + 3\beta + 2 + 3\alpha + 2 + 3\alpha + 2 + \beta + 1 + \alpha + 1 - 2 - 2 = 5\alpha + 5\beta + 4 = 9,$

$-2\alpha\beta - 2\alpha^2 - 2(\alpha\beta)^2 - 2\alpha^4 - 2\alpha^4\beta^2 - 2\alpha^5\beta = 2 - 2\alpha^2 - 2 - 2\alpha^4 - 2\alpha^2 + 2\alpha^4 = -4\alpha^2,$

$-2\beta^2 - 2\alpha\beta - 2\beta^4 - 2(\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta^5 - 2\alpha^2\beta^4 = -2\beta^2 + 2 - 2\beta^4 - 2 + 2\beta^4 - 2\beta^2 = -4\beta^2.$

Prawdziwy jest następujący ciąg równości: $F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4 = (\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta})^4 + (\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta})^4 + (\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta})^4 = \frac{1}{25}[\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n]^2 + \frac{1}{25}[\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2(\alpha\beta)^{n+1}]^2 + \frac{1}{25}[\alpha^{2n+4} + \beta^{2n+4} - 2(\alpha\beta)^{n+2}]^2 = \frac{1}{25}[\alpha^{4n} + \beta^{4n} + 4(\alpha\beta)^{2n} + 2(\alpha\beta)^{2n} - 4\alpha^{3n}\beta^n - 4\alpha^n\beta^{3n} + \alpha^{4n+4} + \beta^{4n+4} + 4(\alpha\beta)^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} - 4\alpha^{3n+3}\beta^{n+1} - 4\alpha^{n+1}\beta^{3n+3} + \alpha^{4n+8} + \beta^{4n+8} + 4(\alpha\beta)^{2n+4} + 2(\alpha\beta)^{2n+4} - 4\alpha^{3n+6}\beta^{n+2} - 4\alpha^{n+2}\beta^{3n+6}] = \frac{1}{25}[\alpha^{4n} + \alpha^{4n+4} + \alpha^{4n+8} + \beta^{4n} + \beta^{4n+4} + \beta^{4n+8} + 4(\alpha\beta)^{2n} + 2(\alpha\beta)^{2n} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} + 4(\alpha\beta)^{2n+4} + 2(\alpha\beta)^{2n+4} - 4\alpha^{3n}\beta^n - 4\alpha^{3n+3}\beta^{n+1} - 4\alpha^{3n+6}\beta^{n+2} - 4\alpha^n\beta^{3n} - 4\alpha^{n+1}\beta^{3n+3} - 4\alpha^{n+2}\beta^{3n+6}] = \frac{1}{25}[\alpha^{4n}(1 + \alpha^4 + \alpha^8) + \beta^{4n}(1 + \beta^4 + \beta^8) + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 - 4\alpha^{3n}\beta^n(1 + \alpha^3\beta + \alpha^6\beta^2) - 4\alpha^n\beta^{3n}(1 + \alpha\beta^3 + \alpha^2\beta^6)] = \frac{1}{25}[\alpha^{4n}(24\alpha + 16) + \beta^{4n}(24\beta + 16) + 18 - 8\alpha^{3n+2} - 8\alpha^n\beta^{3n+2}].$

Mamy $2(F_nF_{n+1})^2 + 2(F_nF_{n+2})^2 + 2(F_{n+1}F_{n+2})^2 = 2(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta})^2 + 2(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta})^2 + 2(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta})^2 = \frac{2}{25}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - \alpha^n\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^n)^2 + \frac{2}{25}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^n\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}\beta^n)^2 + \frac{2}{25}(\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3} - \alpha^{n+1}\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}\beta^{n+1})^2 = \frac{2}{25}[\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} + \alpha^{2n}\beta^{2n+2} + \alpha^{2n+2}\beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^{2n+1} - 2\alpha^{3n+1}\beta^{n+1} - 2\alpha^{3n+2}\beta^n - 2\alpha^n\beta^{3n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{3n+1} + 2(\alpha\beta)^{2n+1}) + \alpha^{4n+4} + \beta^{4n+4} + \alpha^{2n}\beta^{2n+4} + \alpha^{2n+4}\beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} - 2\alpha^{3n+2}\beta^{n+2} - 2\alpha^{3n+4}\beta^n - 2\alpha^n\beta^{3n+4} - 2\alpha^{n+2}\beta^{3n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} + \alpha^{4n+6} + \beta^{4n+6} + \alpha^{2n+2}\beta^{2n+4} + \alpha^{2n+4}\beta^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+3} - 2\alpha^{3n+4}\beta^{n+2} - 2\alpha^{3n+5}\beta^{n+1} - 2\alpha^{n+1}\beta^{3n+5} - 2\alpha^{n+2}\beta^{3n+4} + 2(\alpha\beta)^{2n+3}] = \frac{2}{25}[\alpha^{4n+2} + \alpha^{4n+4} + \alpha^{4n+6} + \beta^{4n+2} + \beta^{4n+4} + \beta^{4n+6} + \alpha^{2n}\beta^{2n+2} + \alpha^{2n+2}\beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^{2n+1} + 2(\alpha\beta)^{2n+1} + \alpha^{2n}\beta^{2n+4} + \alpha^{2n+4}\beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+2} + \alpha^{2n+2}\beta^{2n+4} + \alpha^{2n+4}\beta^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+3} + 2(\alpha\beta)^{2n+3} - 2\alpha^{3n+1}\beta^{n+1} - 2\alpha^{3n+2}\beta^n - 2\alpha^{3n+2}\beta^{n+2} - 2\alpha^{3n+4}\beta^n - 2\alpha^{3n+4}\beta^{n+2} - 2\alpha^{3n+5}\beta^{n+1} - 2\alpha^n\beta^{3n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{3n+1} - 2\alpha^n\beta^{3n+4} - 2\alpha^{n+2}\beta^{3n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{3n+5} - 2\alpha^{n+2}\beta^{3n+4}] = \frac{2}{25}[\alpha^{4n}(\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6) + \beta^{4n}(\beta^2 + \beta^4 + \beta^6) + \beta^2 + \alpha^2 - 2 - 2 + \beta^4 + \alpha^4 + 2 + 2 + \beta^2 + \alpha^2 - 2 - 2 + \alpha^{3n}\beta^n(-2\alpha\beta - 2\alpha^2 - 2(\alpha\beta)^2 - 2\alpha^4 - 2\alpha^4\beta^2 - 2\alpha^5\beta) + \alpha^n\beta^{3n}(-2\beta^2 - 2\alpha\beta - 2\beta^4 - 2(\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta^5 - 2\alpha^2\beta^4)] = \frac{1}{25}[\alpha^{4n}(24\alpha + 16) + \beta^{4n}(24\beta + 16) + 18 - 8\alpha^{3n+2} - 8\alpha^n\beta^{3n+2}].$ ∎

Twierdzenie 75 (Raine, 1948) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 = F_{2n+3}^2.$$

Dowód. Będą nam potrzebne następujące obliczenia pomocnicze:

$\alpha^3 + \beta^3 = F_3\alpha + F_2 + F_3\beta + F_2 = F_3 + 2F_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4,$

$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = -\beta - \alpha = -1.$
Mamy

$$
\begin{array}{rcl}
(F_nF_{n+3})^2 + \ (2F_{n+1}F_{n+2})^2 & = & (\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta})^2 + \ (2\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta})^2 \\
& = & \frac{1}{25}[(\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3} - \alpha^n\beta^{n+3} - \ \alpha^{n+3}\beta^n)^2] \\
& = & \frac{1}{25}\{[\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3} - 4(\alpha\beta)^n]^2 \\
& + & 4(\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3} + (\alpha\beta)^n]^2\} \\
& = & \frac{1}{25}[\alpha^{4n+6} + \beta^{4n+6} + 16 - 8(\alpha\beta)^n\alpha^{2n+3} \\
& - & 8(\alpha\beta)^n\beta^{2n+3} + 2(\alpha\beta)^{2n+3} + 4(\alpha^{4n+6} + \beta^{4n+6} \\
& + & 1 + \ 2(\alpha\beta)^{2n+3} + 2(\alpha\beta)^n\beta^{2n+3} + 2(\alpha\beta)^n)] \\
& = & \frac{1}{25}(5\alpha^{4n+6} + 5\beta^{4n+6} + 10) \\
& = & \frac{1}{5}(\alpha^{4n+6} + \beta^{4n+6} + 2).
\end{array}
$$

Łatwo dostajemy

$$
\begin{array}{rcl}
F_{2n+3}^2 & = & (\frac{\alpha^{2n+3}-\beta^{2n+3}}{\alpha-\beta})^2 \\
& = & \frac{1}{5}[\alpha^{4n+6} + \beta^{4n+6} - 2(\alpha\beta)^{2n+3}] \\
& = & \frac{1}{5}(\alpha^{4n+6} + \ \beta^{4n+6} + 2).
\end{array}
$$

■

Twierdzenie 76 (Everman et al., 1960) *Dla dowolnych liczb całkowitych n, h, oraz k mamy*

$$F_{n+h}F_{n+k} - \ F_nF_{n+h+k} = \ (-1)^nF_hF_k.$$

Dowód. Mamy

$$
\begin{array}{rcl}
F_{n+h}F_{n+k} - \ F_nF_{n+h+k} & = & \frac{\alpha^{n+h}- \ \beta^{n+h}}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+k}- \ \beta^{n+k}}{\alpha-\beta} - \ \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+h+k}- \ \beta^{n+h+k}}{\alpha-\beta} \\
& = & \frac{1}{5}[\alpha^{4n+6} + \beta^{4n+6} - 2(\alpha\beta)^{2n+3}] \\
& = & \frac{1}{5}(\alpha^{2n+h+k} + \ \beta^{2n+h+k} - \ \alpha^{n+h}\beta^{n+k} - \ \alpha^{n+k}\beta^{n+h}) \\
& - & \frac{1}{5}(\alpha^{2n+h+k} + \ \beta^{2n+h+k} - \ \alpha^n\beta^{n+h+k} - \ \alpha^{n+h+k}\beta^n) \\
& = & \frac{1}{5}(\alpha^{n+h+k}\beta^n + \ \alpha^n\beta^{n+h+k} - \ \alpha^{n+h}\beta^{n+k} - \ \alpha^{n+k}\beta^{n+h}).
\end{array}
$$

Łatwo sprowadzamy prawą stronę do tej samej postaci:

$$
\begin{array}{rcl}
(-1)^nF_hF_k & = & (-1)^n\frac{\alpha^h- \ \beta^h}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^k- \ \beta^k}{\alpha-\beta} \\
& = & \frac{(\alpha\beta)^n}{5}(\alpha^{h+k} + \ \beta^{h+k} - \ \alpha^h\beta^k - \ \alpha^k\beta^h) \\
& = & \frac{1}{5}(\alpha^{n+h+k}\beta^n + \ \alpha^n\beta^{n+h+k} - \ \alpha^{n+h}\beta^{n+k} - \ \alpha^{n+k}\beta^{n+h}).
\end{array}
$$

■

Twierdzenie 77 (Fadlock, 1965) *Dla dowolnych liczb całkowitych m oraz n mamy*

$$F_{2m+1}F_{2n+1} = \ F_{m+ \ n+ \ 1}^2 + \ F_{m-n}^2.$$

Dowód. Dostajemy

$$\begin{aligned}
F_{m+n+1}^2 + F_{m-n}^2 &= \left(\tfrac{\alpha^{m+n+1}-\beta^{m+n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2 + \left(\tfrac{\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{2(m+n+1)} + \beta^{2(m+n+1)} - \alpha^{2m+1}\beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1}\beta^{2m+1}).
\end{aligned}$$

Prawdziwy jest następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
F_{2m+1}F_{2n+1} &= \tfrac{\alpha^{2m+1}-\beta^{2m+1}}{\alpha-\beta}\tfrac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta} \\
&= \tfrac{1}{5}[\alpha^{2(m+n+1)} + \beta^{2(m+n+1)} - 2(\alpha\beta)^{m+n+1} \\
&- \alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} - 2(\alpha\beta)^{m-n}] \\
&= \tfrac{1}{5}\{[\alpha^{2(m+n+1)} + \beta^{2(m+n+1)} - 2(\alpha\beta)^{m+n+1} \\
&- (\alpha\beta)^{2n+1}[\alpha^{2(m-n)} + \beta^{2(m-n)} - 2(\alpha\beta)^{m-n}]\} \\
&= \tfrac{1}{5}[\alpha^{2(m+n+1)} + \beta^{2(m+n+1)} - 2(\alpha\beta)^{m+n+1}) \\
&- \alpha^{2m+1}\beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1}\beta^{2m+1} + 2(\alpha\beta)^{m+n+1}] \\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{2(m+n+1)} + \beta^{2(m+n+1)} - \alpha^{2m+1}\beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1}\beta^{2m+1}).
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 78 (Sharpe, 1965) *Dla dowolnych liczb całkowitych n oraz k mamy*

$$F_{n+2k}^2 - F_n^2 = F_{2k}F_{2n+2k}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
F_{n+2k}^2 - F_n^2 &= \left(\tfrac{\alpha^{n+2k}-\beta^{n+2k}}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left(\tfrac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{5}[\alpha^{2n+4k} + \beta^{2n+4k} - 2(\alpha\beta)^{n+2k} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n] \\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{2n+4k} + \beta^{2n+4k} - \alpha^{2n} - \beta^{2n}).
\end{aligned}$$

Dostajemy

$$\begin{aligned}
F_{2k}F_{2n+2k} &= \tfrac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{\alpha-\beta}\tfrac{\alpha^{2n+2k}-\beta^{2n+2k}}{\alpha-\beta} \\
&= \tfrac{1}{5}[\alpha^{2n+4k} + \beta^{2n+4k} - 2(\alpha\beta)^{n+2k} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n] \\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{2n+4k} - \alpha^{2k}\beta^{2n+2k} - \alpha^{2n+2k}\beta^{2k} + \beta^{2n+4k}) \\
&= \tfrac{1}{5}(\alpha^{2n+4k} + \beta^{2n+4k} - \alpha^{2n} - \beta^{2n}).
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 79 (Hoggatt, 1965) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$L_nL_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
L_nL_{n+1} &= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\
&= \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta \\
&= \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (\alpha\beta)^n(\alpha + \beta) \\
&= L_{2n+1} + (-1)^n.
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 80 (Hoggatt, 1976) *Dla każdej liczby całkowitej n mamy*

$$F_{4n+3} - 1 = L_{2n+1}F_{2n+2}.$$

Dowód. Łatwo sprowadzamy prawą stronę równania do postaci lewej jego strony:

$$\begin{aligned}
L_{2n+1}F_{2n+2} &= (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})\tfrac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{\alpha-\beta} \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{4n+3} - \beta^{4n+3} - \alpha^{2n+1}\beta^{2n+2} + \alpha^{2n+2}\alpha^{2n+1}) \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^{4n+3} - \beta^{4n+3} - (\alpha\beta)^{2n+1}(\beta - \alpha)] \\
&= \tfrac{\alpha^{4n+3} - \beta^{4n+3}}{\alpha-\beta} + \tfrac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} \\
&= F_{4n+3} - 1.
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 81 (Koshy, 1998) *Dla dowolnych liczb całkowitych n oraz r mamy*

$$L_{n+r}^2 + L_{n-r}^2 = L_{2n}L_{2r} + 4(-1)^{n+r}.$$

Dowód. Prawdziwy jest następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
L_{n+r}^2 + L_{n-r}^2 &= (\alpha^{n+r} + \beta^{n+r})^2 + (\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})^2 \\
&= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + 2(\alpha\beta)^{n+r} + \alpha^{2n-2r} + \beta^{2n-2r} + 2(\alpha\beta)^{n-r} \\
&= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + 2(\alpha\beta)^{n+r} + (\alpha\beta)^{2r}[\alpha^{2n-2r} + \beta^{2n-2r} + 2(\alpha\beta)^{n-r}] \\
&= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + 2(\alpha\beta)^{n+r} + \alpha^{2n}\beta^{2r} + \alpha^{2r}\beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^{n+r} \\
&= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + \alpha^{2n}\beta^{2r} + \alpha^{2r}\beta^{2n} + 4(-1)^{n+r}.
\end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
L_{2n}L_{2r} + 4(-1)^{n+r} &= (\alpha^{2n} + \beta^{2n})(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + 4(-1)^{n+r} \\
&= \alpha^{2n+2r} + \beta^{2n+2r} + \alpha^{2n}\beta^{2r} + \alpha^{2r}\beta^{2n} + 4(-1)^{n+r}.
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 82 (Ferns, 1967) *Dla dowolnych liczb całkowitych m oraz n mamy*

$$2F_{m+n} = F_mL_n + F_nL_m.$$

Dowód. Dostajemy

$$\begin{aligned}
F_mL_n + F_nL_m &= \tfrac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha-\beta}(\alpha^n + \beta^n) + \tfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}(\alpha^m + \beta^m) \\
&= \tfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n} + \alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m \\
&+ \alpha^{m+n} - \beta^{m+n} + \alpha^n\beta^m - \alpha^m\beta^n) \\
&= 2\tfrac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\alpha - \beta} \\
&= 2F_{m+n}.
\end{aligned}$$

■

Bibliografia

[1] K. Atanassov, V. Atanassova, A. Shannon, and J. Turner, *New Visual Perspectives on Fibonacci Numbers*, World Scientific, Singapore 2002.

[2] A. Benjamin, A. Eustis, and S. Plott, *The 99th Fibonacci Identity*, The Electronic Journal of Combinatorics 15 (2008), #R34.

[3] A. T. Benjamin and J. J. Quinn, *Proofs that Really Count– The Art of Combinatorial Proof*, The Mathematical Association of America, Washington 2003.

[4] C. Boroden, *Fibonacci Trading: How to Master the Time and Price Advantage*, McGraw-Hill, New York 2008.

[5] R. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, Singapore 2006.

[6] M. C. Ghyka, *Złota liczba*, Universitas, Kraków 2006.

[7] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley-Interscience, New York 2001.

[8] A. Philippou, G. Bergum, and A. Horadam (editors), *Fibonacci Numbers and Their Applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 2001.

[9] A. Posametier and I. Lehmann, *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*, Prometheus Books, New York 2007.

[10] R. Shesso, *Math for Mystics*, Weiser Books, San Francisco 2007.

[11] L. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer, New York 2003.

[12] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section*, Dover Publications, New York 2008.

[13] N. Vorobiev, *Fibonacci Numbers*, Birkhäuser, Basel 2000.

[14] www.en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci

[15] www.en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_%C3%89douard_Anatole_Lucas